

Exercice 1:

Vrai ou Faux

1) une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9+i$ est : $3+i$

2) Soit z un nombre complexe $|z+i|$ est égal à :
 $|i\bar{z} + 1|$

3) Soit z un nombre complexe non nul et d'argument α .
Un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}$ est : $\frac{2\pi}{3} + \alpha$

4) soit $n \in \mathbb{N}$, $(\sqrt{3}+i)^n$ est un imaginaire pur ssi :
 $n \equiv 3 \pmod{6}$

5) Soient $A(i)$ et $B(-1)$, l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $|z-i| = |z+1|$ est : (AB)

6) Soit $\Omega(1-i)$, $E : |z-1+i| = |3-4i|$ a pour équation :
 $z = 1-i+5e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

7) Soient $A(4)$ et $B(3i)$. L'axe du point C tel que ABC soit isocèle rectangle direct en A est : $7+4i$

8) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de $\frac{z-2}{z-1} = z$ est
 $\{1-i, 1+i\}$

9) x et y sont deux entiers et tel que $\text{pgcd}(24x, 64y) = 64$
 $x \equiv 0 \pmod{64}$

10) L'équation : $6x + 18y = 3$ admet dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:
une infinité de solutions

11) Soit n un entier non nul tel que $5n \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7) = 35$
 $n \equiv 0 \pmod{7}$

12) Soit $I = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$ alors on a : $I = -\frac{1}{4}$

13) Le quotient dans la division euclidienne de -2011 par 87 est -23

14) g est la similitude indirecte d'écriture complexe :
 $z' = -2i\bar{z} + 3$, de centre A et d'axe D
Soit D' la perpendiculaire à D en A ,
alors : $g \circ S_{D'}$ est l'homothétie $h_{(A,2)}$

Exercice 2 :

1) Soient $A(4+i)$, $B(1+i)$, $C(5i)$ et $D(-3-i)$ Placer ces points sur une figure.

2) Soit $f : z' = (1+2i)z - 2-4i$

a) Préciser les images des points A et B par f

b) Caractériser l'application f , on désigne par I son centre.

3) a) Montrer que pour tout z on a : $z' - z = -2i(2 - i - z)$

b) Evaluer, pour tout point M différent du point $I : \frac{MM'}{IM}$ et $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MM'})$

c) Quelle est la nature du triangle IMM'

d) Soit $E(-1-i\sqrt{3})$. Ecrire Z_E sous forme exponentielle.
Puis placer E

Déduire une construction du point $E = f(E)$

Exercice 3:

Soit $(E) : z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$

1) a) Montrer que E admet une solution réelle, noté z_1

b) Résoudre alors E

2) Soient A , B et C les points d'affixes respectives : 1 , $2+2i$, et $1-i$

a) Placer A , B et C

b) Déterminer le module et un argument de $\frac{2+2i}{1-i}$. En déduire la nature du triangle OBC .

c) Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ?

3) Soit D l'image de O par la rotation de centre C et d'angle $-\pi/2$

a) Déterminer l'affixe de D

b) Quelle est la nature de $OCDB$?

Exercice 4 :

Soit f l'application qui à tout point $M(z)$ non nulle associe le point $M'=f(M)$ d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z}{|z|} (2 - |z|)$

C_1 le cercle de centre O et de rayon 1 , On pose $z = re^{i\alpha}$

1) Montrer que $z' = (2-r)e^{i\alpha}$

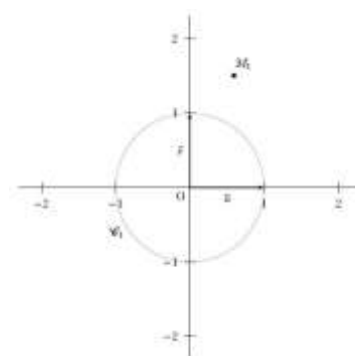
2) Déterminer l'affixe a' du point $A'=f(A(3))$

Soit B le point d'affixe

$b = -\sqrt{3} + i$

a) Ecrire b sous forme exponentielle

b) Déterminer l'affixe b' du point $B'=f(B)$ Placer A , B , A' et B'



4)a) Déterminer l'ensemble E des points M du plan privé du point O dont l'image par f est O. Représenter E sur la figure.

5) Montrer que le cercle C1 est l'ensemble des points M du plan distincts de O tels que $f(M) = M$

6) Pour cette question, $M \neq O$ et M n'appartenant pas à C_1 , $I = M * M'$

a) Montrer que I appartenant à C1

b) Montrer que I appartient à [OM]

c) Sur la figure construire le point M_1' , image par f du point M_1 .

Exercice 5

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit $\theta \in [0, \pi]$

1°) Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$(E_\theta): z^2 - 2(1 + 3e^{i\theta})z - 3 + 10e^{i\theta} + 8e^{2i\theta} = 0.$$

Résoudre (E_θ) dans $\mathbb{C}$.

2°) On désigne par M et N les points d'affixes respectives $z_1 = 3 + 2e^{i\theta}$ et $z_2 = -1 + 4e^{i\theta}$

a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie.

b) Peut-on avoir $M = N$?

c) Déterminer θ pour que O soit un point du cercle de diamètre [MN].

3°) On considère les points A et B d'affixes

$$\text{respectives : } z_A = 3 + 2i \text{ et } z_B = -1 + 4i.$$

Extérieurement au triangle OAB, on construit les deux carrés OA_1A_2A et OBB_1B_2 .

a) En remarquant que A_2 est l'image de O par une rotation de centre A, déterminer l'axe de A_2 .

En déduire l'axe du centre I du carré OA_1A_2A .

b) En remarquant que B_1 est l'image de O par une rotation de centre B, déterminer l'axe de B_1 .

En déduire l'axe du centre J du carré OBB_1B_2 .

c) Calculer l'axe du milieu K du segment [AB]. A l'aide des axes des différents points, calculer les distances KI et KJ, ainsi qu'une mesure de l'angle $(\vec{KI}, \vec{KJ})$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 6:

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes : $\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$

2) Soit $A(4-2i)$ Déterminer la forme algébrique de l'axe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3) Soit $D(2i)$

a) Représenter l'ensemble E des points $M(z) \neq 2i$ tels que $\arg(z-2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

b) Représenter l'ensemble F des points $M(z)$ tels que $z = 2i + 2e^{i\theta}$; $\theta \in \mathbb{R}$

4) A tout point $M(z \neq -2)$ associe le point $M'(z')$ telle que $z' = \frac{z-1}{\bar{z}+2}$

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z'| = 1$

Exercice 7:

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (5-4i)z - 3 - 15i = 0$

2) On désigne par $A(-3i)$, $B(5-i)$, $A'(-3)$ et $B'(1+5i)$

Placer les points A, B, A' et B'.

Montrer que OAA' et OBB' sont des triangles rectangles et isocèles.

3) Soit M un point de la droite (AB) d'axe z_M

a) Montrer qu'il existe un réel k tel que $z_M = 5k + (2k-3)i$

b) Montrer que les droites (OM) et (A'B') sont perpendiculaires ssi le point M est le milieu du segment [AB]. Vérifier que dans ce cas $A'B' = 2OM$

Exercice 8:

1) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$;

Résoudre l'équation : $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère

orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, M et N d'axe respectives $-1+i$, $i + e^{i\theta}$ et $i - e^{i\theta}$ où θ est un réel de $]0, \pi[$.

a- Montrer que les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AN}$ sont orthogonaux.

b- Montrer que lorsque θ varie dans $]0, \pi[$ les points M et N varient sur un cercle C que l'on déterminera.

3) a- Déterminer en fonction de θ l'aire A (θ) du triangle AMN.

b- Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire A (θ) est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle C.

Exercice 9:

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2}{u_n} \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1) Démontrer que $1 \leq u_n \leq 2$ et que $1 \leq v_n \leq 2$

2) Mque pour tout n ; $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$

3) Mque pour tout n ; $u_n \geq v_n$

4) Mque (u_n) et décroissante et (v_n) croissante.

5) Mque pour tout n ; $u_n - v_n \leq 1$

et en déduire que $(u_n - v_n)^2 \leq u_n - v_n$

6) Montrer que pour tout n ; $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{4} (u_n - v_n)$

En déduire que pour tout n , $u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$

7) Montrer que les suites u et v sont adjacentes et donner leur limite commune l .

Exercice 10 :

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_n = 0.5 \\ u_{n+1} = 0.5(u_n + \frac{2}{u_n}) \end{cases}$

1) Soit $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, $x > 0$

a) Étudier les variations de f

b) Montrer que pour tout n non nul $u_n \geq \sqrt{2}$

2) a) Montrer que pour tout $x \geq \sqrt{2}$; $f(x) \leq x$

b) En déduire la monotonie de u

c) Déduire que u est convergente

3) Déterminer la limite l de u

Exercice 11:

On pose pour tout $n \geq 1$; $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^2 (2-x)^n e^x dx$

1) Calculer I_1

2) Établir que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$

3) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$; $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

b) Déduire que $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

4) On pose $u_n = \frac{2^n}{n!}$; pour tout $n \geq 1$

a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout $n \geq 3$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$$0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

5) En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de (I_n)

6) Justifier enfin que $e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}$

Exercice 12 :

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

A) 1) a) Montrer que pour tout $n > 0$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$$

b) Déduire que la suite u est convergente.

B) Soit $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

1) a) Justifier que pour tout entier $n > 0$

$$\frac{1}{1+n} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$$

b) Vérifier que pour tout $n > 0$, $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} - f(n)$

c) En déduire que pour tout $n > 0$, $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$

2) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(1+k)}$

a) Montrer que pour tout $n > 0$,

$$0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq S_n.$$

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0 on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

En déduire que $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$

En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=n}^{2n} f(k)$

Vérifier que pour tout $n \geq 1$;

$$f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Déterminer la limite de la suite u

Exercice 13

On considère la suite définie pour tout

$$n \geq 1 \text{ par } u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

1) a/ Calculer u_1 et u_2

Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a : $x \geq \ln(1+x)$

2) Montrer que pour tout $n \geq 1$;

$$\text{on a : } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

En déduire la monotonie de la suite u .

3) On pose, pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_n - \frac{1}{n}$

a/ Démontrer que pour tout $n \geq 1$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

b/ Déduire la monotonie de la suite v .

4) a/ Démontrer que les suites u et v sont convergentes vers la même limite l .

b/ Donner un encadrement de l .

c/ Déduire la limite de la suite S définie par $S_n =$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

Exercice 14 :

On considère la suite J_n définie par

$$J_n = \int_1^n e^{-t} \sqrt{1+t} dt$$

1) Démontrer que la suite J est croissante

2) On définit la suite (I_n) , pour tout $n > 0$,

$$I_n = \int_1^n e^{-t} (1+t) dt$$

a) Justifier que pour tout $t \geq 1$; on a $\sqrt{1+t} \leq 1+t$

b) En déduire que $J_n \leq I_n$

c) Calculer I_n en fonction de n .

En déduire que la suite (J_n) est majorée

d) Conclure que la suite (J_n) est convergente.

Exercice 15

Soit f une fonction définie sur $[1, +\infty[$ et ayant une dérivée continue et croissante.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \sum_{n=1}^p f'(n)$

1) a) Démontrer en appliquant le théorème des accroissements finis à f dans un intervalle bien choisi que : Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f'(n) \leq f(n+1) - f(n) \leq f'(n+1)$

b) En déduire que ; Pour tout p de $\mathbb{N}^*$, $u_p - f'(p) \leq f(p) - f(1) \leq u_p - f'(1)$

2) On prend $f(x) = \frac{1}{x^2}$

a) Vérifier que la suite u est monotone.

b) Montrer que la suite u est minorée par (-3)

c) En déduire que la suite (v_p) de terme général $v_p = \sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{n^3}\right)$ est convergente et que sa limite appartient à $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

Exercice 17

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de côté 2 et de centre O.

On désigne par :

- I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [OC]
- S : la symétrie centrale de centre O.
- R : le quart de tour direct de centre I
- $\varphi = S \circ R$

1°) a) Déterminer $\varphi(I)$. En déduire que φ est une isométrie distincte de l'identité.

b) Déterminer $\varphi(J)$ puis $\varphi(B)$

c) Détruire que φ est une rotation de centre J dont on précisera l'angle.

2°) Soit g l'isométrie définie par $g = \varphi \circ S_{(AC)}$ où $S_{(AC)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (AC)

a) Caractériser : $S_{(JC)} \circ S_{(JL)}$ et $S_{(JL)} \circ S_{(AC)}$

b) Déduire que $g = S_{(JC)} \circ S_L$

c) On désigne par Δ_1 et Δ_2 les médiatrices respectives de [JC] et [OJ]. Caractériser $S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$. En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

3°) Soit G le barycentre des points pondérés (O, 2) ; (J, -1) et (I, 1) et G' son image par φ .

Exprimer $\overrightarrow{CG'}$ en fonction de $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ puis construire G' sans construire G.

Exercice 18

Le plan est orienté dans le sens direct, ABCD est un losange de centre O, I est le milieu du segment [AB],

J est le milieu du segment [AD] et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3} (2\pi)$

1)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie A en B et I en O

b) Caractériser f

c) Déterminer l'image du triangle ABD par f .

2) Soit g l'antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que $g(A)=D$

a) Montrer que $g(D)=B$

b) Caractériser alors g

3) Soit s un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que $s(A)=C$

a) Démontrer que s est une symétrie orthogonale d'axe (BD)

b) Définir les isométries suivantes

$$f = r(B, \frac{\pi}{3}) \circ s \quad \text{et} \quad g = r(O, \frac{\pi}{3}) \circ t_{\overrightarrow{IO}}$$

3) Soit φ le déplacement qui envoie A en D et D en B. Montrer que pour tout point M du plan on a $\varphi(M)$ et $g(M)$ sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

4) Caractériser l'isométrie $h = \varphi \circ t_{\overrightarrow{OJ}}$

Exercice 19:

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. ABCD est un losange tel que $AB=AD=BD$; $A'=A*B$ et $O=A*C$

Définir les transformations suivantes :

$$f = S_{AB} \circ S_{AC} \quad \text{et} \quad g = S_{AB} \circ S_{CD}$$

2)a) Caractériser $g = t_{AB} \circ S_{DA'}$

$$b) \varphi = t_{AB} \circ S_{AC}$$

Mque φ est une symétrie glissante et la caractériser.

3)a) Soit $h_1 = r(A, \frac{\pi}{3}) \circ S_{AC}$

Mque h_1 est une symétrie orthogonale que l'on précisera.

b) Soit $h_2 = r(A, \frac{\pi}{3}) \circ S_{DC}$

Mque h_2 est une symétrie glissante.

4)a) Montrer qu'il existe un unique déplacement d tel que $d(A) = B$ et $d(B) = D$

b) caractériser d

5) Soit S l'antidéplacement tel que $S(A)=B$ et $S(B)=D$

a) Montrer que S n'a pas de points fixes

b) Caractériser S

Exercice 20

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de sens direct et de centre I.

On désigne par J, K et O les milieux respectifs des segments [AD], [DC] et [JK].

1/ Caractériser chacune des applications suivantes :

a) $\varphi_1 = S_{(IK)} \circ S_{(IC)}$

b) $\varphi_2 = S_{(AC)} \circ \varphi_1$

2/ a) Montrer qu'il existe un unique déplacement r transformant D en I et I en A

b) Caractériser r.

c) On désigne par O' l'image du point O par r. Montrer que O' est le milieu du segment [AI].

3/ On pose $f = S_{(IJ)} \circ r$

a) Déterminer f(J). En déduire la nature de f.

b) Déterminer f(I). En déduire l'axe de f.

4/ On pose $g = S_{(AC)} \circ r$

a) Déterminer g(D) et g(I).

b) Montrer que g n'admet aucun point invariant.

c) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

5/ On pose $r' = t_{\overrightarrow{JK}} \circ r$

a) Quelle est la nature de r' ?

b) Montrer que I est le centre de r'.

6/ Soient M un point variable du segment [BC] (on suppose $M \neq B$ et $M \neq C$) et N un point de [AB] tel que : $BM = AN$.

a) Montrer que $r'(M) = N$

b) En déduire que le cercle de diamètre [MN] passe par un point fixe.

c) Soit P le point de [AD] tel que : $DP = AN$. Montrer que $r'(N) = P$ et en déduire que I est le milieu du segment [MP].

Exercice :21

ABC un triangle rectangle en A tel que

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ et } O \text{ le milieu de } [BC].$$

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O en A et B en C.

b) Montrer que f est une rotation.

c) On note I le centre de f.

Donner une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IO})$ et $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA})$

d) En déduire que I appartient au segment [AB] et que I est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1).

2) a) Soit $r = R_{(C, \frac{\pi}{3})}$. Caractériser l'application f o r.

b) On note C' l'image de C par f. Montrer que O, I et C' sont alignés.

3) Soit g l'antidépacement qui envoie O en A et B en C.

a) Déterminer les images des droites (OI) et (OA) par g.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

Exercice 22

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure donnée sur la feuille à rendre.

• C est un cercle de diamètre [BC] et de centre O.

• A le point de C tel que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

• I le point de [AB] tel que $AI = AC$.

• K le milieu de [AB].

• Δ La perpendiculaire à (BC) passant par K.

1°) a) Montrer que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$.

b) En déduire que le triangle IBC est isocèle en I.

2°) a) Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que $R(C) = I$ et $R(I) = B$.

b) Préciser l'angle de R et construire son centre Ω .

c) Montrer que Ω appartient au cercle C.

d) Montrer que O, I et Ω sont alignés.

3°) La médiatrice de [IB] recoupe C en J.

a) Montrer que A et J sont symétriques par rapport à (OI) et que C, I et J sont alignés.

b) En déduire que $R(A) = J$

4°) La droite (OA) coupe (BC) en D.

a) Montrer que AJBD est un parallélogramme.

b) Soit f l'antidépacement tel que $f(A) = B$ et $f(J) = D$.

Montrer que f est la symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ où A' est le projeté orthogonal de A sur (BC).

Exercice 23

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

et $AB = AC$. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [BC] et [CD].

Soit E le point défini par : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OB}$.

1) On désigne par : $t_{\overrightarrow{OB}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ et r

la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose $f = t_{\overrightarrow{OB}} \circ r$.

a) Montrer que $f(C) = O$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

c) Déterminer la nature de triangle IAE.

2) Soit s la similitude directe telle que $S(O) = A$; $S(C) = I$

a) Déterminer l'angle et le rapport de S .

b) Montrer que le triangle AIJ est équilatéral et a pour centre O. En déduire que J est le centre de S.

c) Montrer que $S(I) = E$.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(C) = I$ et $\sigma(I) = E$

a) Montrer que σ admet un seul point invariant Ω .

b) Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés $(C, 3)$ et $(E, -1)$

c) Déterminer et construire l'axe Δ de σ .

Exercice 24:

Soit ABCD un carré de centre O tel que

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On désigne $I = A \cdot B$ et $J = A \cdot D$

On note s la similitude directe tels que

$s(D) = O$ et $s(C) = I$.

1) a) Déterminer le rapport et l'angle de s .

b) Soit Ω le centre de s . Trouver une construction géométrique de Ω .

2) a) Préciser les images respectives des droites (BD) et (BC) par s .

b) Déterminer alors $s(B)$ et $s(A)$ et $s \circ s(B)$.

c) Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés $(B, 1)$ et $(J, 4)$.

Exercice 25:

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. On désigne par f l'application qui à tout point M du plan P d'affixe $z = x + iy$ associe le point

$M_1(z_1 = x_1 + iy_1)$ tel que: $z_1 = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{z} + \frac{1+i}{2}$

(x, y, x_1 et y_1 sont des réels).

1°) a) Montrer que f est une similitude indirecte de :

rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre B.

b) Soit Δ l'axe de f . Montrer qu'une équation cartésienne de Δ est : $(1 + \sqrt{2})x + y - 1 = 0$

2°) On désigne par I et J les milieux respectifs de $[OA]$ et $[OB]$.

Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ son symétrique par rapport à (IJ) .

$$a) \text{ Montrer que: } \begin{cases} x' = -y + \frac{1}{2} \\ y' = -x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) En déduire que l'écriture complexe de la symétrie orthogonale $S_{(IJ)}$ est $z' = -i\overline{z} + \frac{1+i}{2}$

3°) Soit l'application $g = f \circ S_{(IJ)}$. On désigne par H le milieu de $[AB]$.

a) Montrer que $g(O) = J$ et $g(H) = H$.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g .

4°) Soit M_0 le point d'affixe $\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i$. Pour tout entier naturel n , Le point M_{n+1} est défini par $M_{n+1} = g(M_n)$.

a) Exprimer HM_n en fonction de n .

b) A partir de quel rang n_0 a-t-on : $\forall n > n_0, M_n$ appartient au disque de centre H et de rayon $r = 0.05$?

c) Pour tout entier naturel n , on note $d_n = M_n M_{n+1}$. Démontrer que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Exercice 26:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. On donne $A(i)$ et $B(1+2i)$

1) Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que $S(O)=A$ et $S(A)=B$

2) Montrer que l'écriture complexe de s est : $z' = (1-i)z + i$. Préciser les éléments caractéristiques de s , on notera Ω le centre de s .

On considère la suite des points (A_n) telle que A_0 est l'origine du repère et pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = s(A_n)$. On note z_n l'affixe du point A_n

3) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $z_n = 1 - (1-i)^n$

b) Déterminer en fonction de n les affixes des vecteurs ΩA_n et $A_n A_{n+1}$; Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $(\Omega A_n ; A_n A_{n+1})$

En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n ? Construire A_3 et A_4

Exercice 27

Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est correcte. Le candidat doit écrire sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la bonne réponse puis donner une justification de la réponse choisie.

1) Soit f la transformation qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ telle que : $z' = 2i\bar{z} - 1 - i$ et $I(1+i)$.

f est une similitude indirecte de rapport 2, de centre I et d'axe $\Delta : x + 2y - 3 = 0$

2) On considère l'équation (E) : $24x - 16y = 8$; où x et y sont des entiers relatifs.

Les solutions de (E) sont de la forme :

$$(x, y) = (3k + 1 ; 2k + 1), k \in \mathbb{Z}.$$

3) On considère l'équation (E') : $x^2 + 5x - 2 \equiv 0 \pmod{17}$

Les solutions de (E') sont de la forme :

$$x = 17k + 13 \text{ ou } x = 17k + 8, k \in \mathbb{Z}.$$

4) Soit $N = (22)^{3n+2} + (13)^{3n+1}$ où n est un entier naturel, alors : $N \equiv 1 \pmod{9}$

Exercice 28

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC

rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. On

désigne E et D les symétriques de A respectivement par rapport aux points B et C.

Soit f la similitude directe qui envoie D en C et C en B.

1°) a) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

b) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude f .

c) On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Montrer que $f(H) = E$

2°) On appelle I le centre de la similitude f .

a) En utilisant la relation $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}$, démontrer que $DC^2 = ID^2$.

b) En déduire la nature du triangle IDC.

c) Construire le point I

3°) On munit le plan du repère orthonormé direct

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Soit ϕ l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -(1+i)\bar{z} + 2 - i$.

a) Montrer que ϕ est une similitude indirecte de centre Ω d'affixe $-1 + 4i$.

b) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte ϕ . Déterminer $\phi(C)$ puis tracer Δ .

c) Donner une équation cartésienne de Δ .

Exercice : 29

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

On note D le symétrique de A par rapport au point C.

On désigne par s la similitude directe transformant D en C et C en B.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s .

2. On appelle Ω le centre de la similitude s .

a) En utilisant la relation $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}$, démontrer que $DC^2 = \Omega D^2$.

b) En déduire la nature du triangle ΩDC .

3. On pose $\sigma = s \circ s$.

a) Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer l'image du point D par la transformation σ .

4. Démontrer que le quadrilatère AD Ω B est un rectangle.

5. Dans cette question, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (A, u, v) , choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 1, i et $2i$.

a) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = (1+i)z + 2 - i$

où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point M et de son image M' par S.

b) On note x et x' , y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z' .

$$\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

Démontrer que

c) Soit J le point d'affixe $1+3i$.

Existe-t-il des points M du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que $\overrightarrow{AM'} \cdot \overrightarrow{AJ} = 0$, $M' = S(M)$.)

Exercice 31:

p entier premier ≥ 7 et $n = p^4 - 1$

1)a) Démontrer que $p \equiv -1 \pmod{3}$ ou $p \equiv 1 \pmod{3}$

b) En déduire que n est divisible par 3.

2) En remarquant que p impaire, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que

$$p^2 - 1 = 4k(k+1) \text{ puis déduire que } n \text{ est divisible par } 16$$

3) Démontrer que $n \equiv 0 \pmod{5}$

4) Déduire de ce qui précède que 240 divise n .

Exercice 32:

Soit $(S) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$

1) Soit x un entier relatif

Démontrer que si x est une solution de (E) :

$x \equiv -12 \pmod{35}$ alors x est une solution de (S)

2)a) Soit x un entier relatif solution de (S).

Justifier qu'il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $x = 5k + 3$ et $x = 7k' + 2$

b) Déterminer tous les couples (u, v) d'entiers relatifs solutions de : $7u - 5v = 1$

c) Déduire de deux questions précédentes que si x est solution de (s) alors il existe un entier p tel que $x = 35p - 12$

d) Dédurre de deux questions précédentes que si x est solution de (s) alors x est une solution de (E)

3) Conclure

Exercice 33:

On considère la suite (un) d'entiers naturels définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 10u_n + 21$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'écriture décimale de u_n .

3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n , u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n , u_n n'est pas divisible par 11.

6. a) Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel k , u_{16k+8} est divisible par 17.

Exercice 34: (Questions indépendantes)

1) Montrer que si $x \wedge y = 1$ alors

$$x^2 \wedge y^2 = 1; x^n \wedge y^n = 1$$

2) a et b deux entiers naturels non nuls et p un nombre premier tels que : $\text{pgcd}(a, b) = p$

Déterminer les valeurs possibles de

$$a) \text{pgcd}(a^2, b); \quad b) \text{pgcd}(a^2, b^3)$$

3) Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple d'entiers naturels (a, b) vérifiant : $N = 9a + 1$ et $N = 5b + 3$
Déterminer le reste de la division euclidienne de N par 45

4) Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers relatifs

$$\text{tels que : } \begin{cases} \text{ppcm}(x, y) = 396 \\ xy = 2376 \end{cases}$$

Exercice 35:

1) On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où est un couple de nombres entiers relatifs.

a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a; b)$ de nombres entiers

$$\text{vérifiant : } \begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

a) Montrer que le couple $(a; -b)$ est solution de (E).

b) Quel est le reste, dans la division de N par 40

3) a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Au VIII^{ème} siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une

auberge. Les hommes ont dépensé 8

pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.

Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 36:

1) On considère l'équation : $(E_1) : 6x - 5y = 7$, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

a) On suppose que le couple d'entiers (x, y) vérifie (E_1)

Démontrer que $x \equiv 2 \pmod{5}$

b) en déduire tous les couples d'entiers, solutions de (E_1)

2) Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

on note Δ la droite d'équation $6x - 5y = 7$

Déterminer le nombre de points de Δ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est inférieure à 500

3) Soit $(E_2) : 6x^2 - 5y^2 = 7$ dont $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

a) Vérifier que si le couple (x, y) est solution de (E_2) , alors $x^2 \equiv 2 \pmod{5}$

b) D que, $\forall \lambda, \lambda^2$ est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5

c) Quel est l'ensemble solution de (E_2)

Exercice 37 :

1) Vérifier que :

$$3 \text{ divise } 4^2 - 1; \quad 7 \text{ divise } 3^6 - 1; \quad 5 \text{ divise } 6^4 - 1;$$

$$11 \text{ divise } 2^{10} - 1$$

2) x, y et z sont des entiers naturels non nuls.

a) Démontrer que si $x \equiv y \pmod{z}$ alors $x \wedge z = y \wedge z$

b) La réciproque est-elle vraie

3) a) On suppose qu'il existe un couple (x_0, y_0) solution de l'équation : $d + m = x + 6$ où $d = x \wedge y$ et $m = x \vee y$
Montrer que d divise 6

b) Déterminer toutes les solutions de $\begin{cases} d + m = x + 6 \\ d = 5 \end{cases}$

c) Déterminer toutes les solutions de $\begin{cases} d + m = x + 6 \\ d = 2 \end{cases}$

Exercice 38:

Dans le plan orienté à un repère orthonormé on considère la droite $D : 5x - 3y = 198$

Trouver tous les points $M(x, y)$ appartenant à D et pour lesquels x et y sont des entiers relatifs non nuls et tels que $\text{pgcd}(x, y) = 18$

Parmi ces points quel est le plus proche de l'origine du repère ?

Parmi ces points quels sont ceux qui se trouvent à l'intérieur du disque de centre $I(60, 60)$ et de rayon 200 ?

Exercice 39

Le plan complexe P est rapporté à un repère

orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f l'application du plan P à lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (z - i)(mz - 1)$ où m est un réel positif.

1°) Déterminer la nature de f lorsque $m = 0$

On prend désormais m strictement positif et différent de 1.

2°) Soit Γ_m l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit imaginaire où z' désigne l'affixe du point M' image de M par f .

a) Montrer que $M(z)$ est un point de Γ_m si et seulement si $m(z^2 + \bar{z}^2) - m.i.(z - \bar{z}) - (z + \bar{z}) = 0$

a) Montrer alors que Γ_m a pour équation :

$$\left(x - \frac{1}{2m}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1-m^2}{4m^2}$$

b) En déduire que Γ_m est une hyperbole dont on précisera le centre et l'excentricité.

c) Déterminer un foyer et la directrice associée de

$$\Gamma_{\frac{1}{2}} \text{ pour } m = \frac{1}{2}$$

Exercice 40

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

, on considère l'ellipse (E) d'équation: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ et

on désigne par I le point de coordonnées $(3\sin\theta, 2\cos\theta)$; où θ est un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$.

1) a) Déterminer l'excentricité, les foyers, les sommets et les directrices de (E) .

b) Tracer (E) ; en précisera en particulier les tangentes aux sommets.

c) Vérifier que le point I appartient à (E) .

2) On désigne par (T) la tangente à (E) au point I .

Vérifier que $(T) : 2\sin\theta x + 3\cos\theta y - 6 = 0$.

3) On désigne par P et Q les points d'intersection de (T) respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On désigne par A l'aire du triangle OPQ .

a) Déterminer les coordonnées de P et Q .

b) Montrer que $A = \frac{6}{\sin 2\theta}$.

c) En déduire que l'aire A est minimale si et seulement si I est le milieu du segment $[PQ]$.

Exercice 41 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Soit $(E) : 3x^2 - 6x + 4y^2 - 9 = 0$

a) Démontrer que (E) est une conique dont on précisera le centre Ω , les sommets A et A' , les foyers F et F' , l'excentricité e , ainsi que les directrices.

B) Vérifier que le point $J(0, \frac{3}{2})$ appartient à (E) et donner une équation cartésienne de la tangente à (E) au point I . Tracer T et (E)

2) On donne la parabole $(P) : y^2 = \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$ a) Déterminer le sommet S , le foyer et la directrice de (P)

b) Vérifier que le point I appartient à (P)

c) Montrer que la droite T est aussi tangente à (P) en I

c) Tracer (P)

3) Soit $\Delta : x + 3 = 0$; quel est l'ensemble des points M tels que : $d(M, O) = \frac{1}{2} d(M, \Delta)$?

4) Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$

$$\text{tel que : } \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{2}{\sqrt{3}} y \end{cases}$$

Déterminer une équation de (E') image de (E) par f .
Reconnaitre la nature de (E') et
Caractériser (E')

Exercice :42

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = x(1 - \ln x)$ et $f(0) = 0$. On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A°) 1°) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0.

2°) a) Dresser le tableau de variation de f . Tracer C .

b) Soit α un réel de $]0, 1[$. Calculer l'aire $A(\alpha)$ du domaine limité par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = e$.

c) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A(\alpha)$

B°) Soit F la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par :

$$F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f(t)}{1+t^2} dt.$$

1°) a) Montrer que F est dérivable sur $]-\infty, 0]$ et $\forall x \leq 0$,

$$F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}.$$

b) En déduire le sens de variation de F .

c) M que F admet une limite finie ℓ lorsque x tend $-\infty$.

2°) a) Montrer que

$$\forall x \leq 0, \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f(t) dt.$$

b) Vérifier que la fonction $x \rightarrow x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

c) Montrer alors que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f(t) dt = \frac{3}{4}$.

En déduire que $\frac{3}{8} \leq \ell \leq \frac{3}{4}$.

C°) Soit (I_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_1^e x(1 - \ln x)^n dx$$

1°) Montrer que pour tout entier non nul,

$$I_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} I_n$$

2°) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et à termes positifs.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}$.

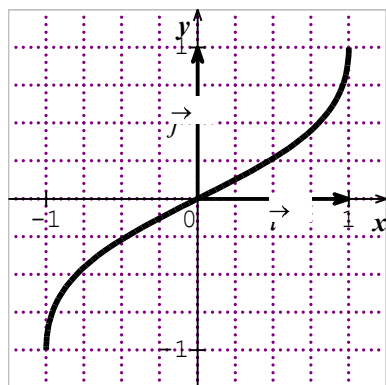
c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$.

Exercice 43

I) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

(unité 2 cm), on a représenté ci-contre la courbe de la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}.$$



1°) En utilisant le graphique.

a) Montrer que f réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur $[-1, 1]$.

b) Étudier le signe de $f(x) - x$, pour $x \in [-1, 1]$

2°) On note g la réciproque de f .

a) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

b) Calculer l'aire du domaine limité par les courbes C de f et C' de g .

c) Montrer que $\int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx = 1 - \ln 2$

II) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$$

1°) Montrer que (U_n) est décroissante.

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\text{on a : } \frac{1}{2} t^n \leq \frac{t^n}{1 + \sqrt{1-t^2}} \leq t^n.$$

En déduire que: $\frac{1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

3°) Montrer alors que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 44:

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $I = [1, e]$

1) Donner par lecture graphique

a) $f(1)$, $f(e)$, $f'(1)$ et $\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{f(x)}{x-e}$

b) Le sens de variation de f sur I

2) a) Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J qu'on précisera.

b) Soit C' la courbe de f^{-1} ; Tracer C'

3) On suppose que pour tout réel x de I , $f(x) = \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x}$

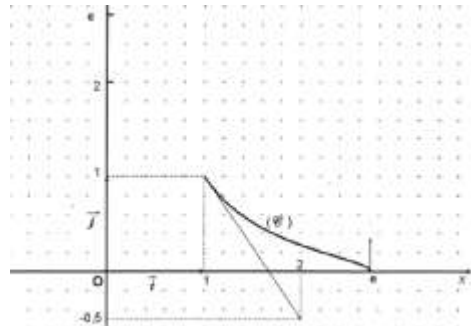
Soit F la fonction définie sur I par

$$F(x) = \frac{2}{3} (1 - \ln x) \sqrt{1 - \ln x}$$

a) Montrer que F est une primitive de f sur I

b) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe C , les droites $x=1$, $x=e$ et $y=0$

c) En déduire l'aire du domaine limité par les deux courbes C et C' et les deux axes des coordonnées.



Exercice 45 :

La courbe C ci-dessous est celle d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) En utilisant le graphique

a) $g(0)$ et $g'(0)$

b) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$

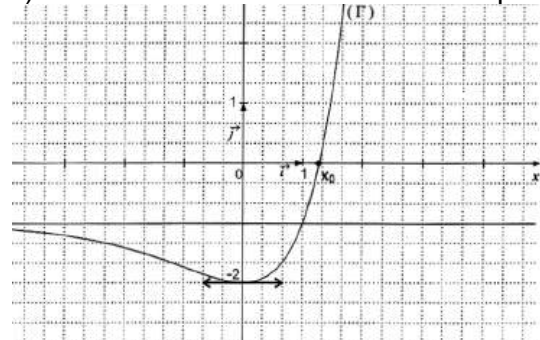
2) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax+b)e^{x-1}$ où a et b sont deux réels

Déduire que $g(x) = (x-1)e^{x-1}$

3) Dans la suite on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^x + 1}{x}$

a) Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f puis tracer C_f



Exercice 46:

Soit $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$

1) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Déterminer les branches infinies de C_f

b) Tracer C_f .

3) a) Mque f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$

b) Tracer la courbe C' de f'

c) Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x > 0$.

4) a) Vérifier que pour tout x on a : $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$

b) Soit $\lambda < 0$, Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine limitée par la courbe C' , l'axe des ordonnées et les droites : $y = \lambda$ et $y = 0$

Exercice 47:

$\forall n > 0$, Soit $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$,

A) 1) Etudier suivant n les variations de f_n .

2) Etudier les positions relatives de C_n et C_{n+1}

3) Tracer C_1 et C_2 .

B) $n > 0$, on pose $I_n = \int_1^e f_n(x) dx$

1) On pose $F(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, Calculer $F'(x)$, en déduire I_1

2) En utilisant une intégration par parties

Mque $I_{n+1} = \frac{-1}{e} + (n+1)I_n$.

3) Déduire l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

4) Mque par récurrence que pour tout $n > 0$,

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

5) a) Mque $\forall n > 0, 0 \leq I_n \leq 1$

b) En déduire $\lim \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$

Exercice 48:

Soit $f(x) = e^{-\sqrt{x-1}}$, $x \geq 1$ et soit C sa courbe

représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

Interpréter graphiquement le résultat.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer la courbe C de f .

2) Soit $F(x) = \int_1^{1+(\ln x)^2} f(t) dt$, $x \in]0, 1]$

a) Mque F est dérivable sur $]0, 1]$ et que $F'(x) = 2 \ln x$

b) Calculer $F(x)$.

3) Pour tout $\alpha \geq 1$, on désigne par $S(\alpha)$ l'aire du domaine limité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$, et $x=\alpha$

a) Mque $S(\alpha) = F(f(\alpha))$

b) Calculer $S(\alpha)$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S(\alpha)$

Exercice 49 :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; on pose $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (\sqrt{t})^{2n} e^{1-t} dt$,

a) Montrer que ; $0 \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$

b) Montrer que pour tout entier naturel k strictement supérieur à 1, $I_k - I_{k-1} = \frac{-1}{k!}$

c) Calculer I_1 et déduire de ce qui précède que

$$I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

d) Déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$

Exercice 50:

Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{\frac{1-x}{2}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un plan rapportée à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A) 1) Dresser le tableau de variation de f .

2) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

3) Tracer (C) .

4) Mque pour tout réel x de $[0, 1]$, on a : $0 \leq f(x) \leq 1$.

B) On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n = \frac{1}{n! 2^{n+1}} \int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}} dx$,

$$\text{et } U_n = 1 + \frac{1}{1! 2} + \frac{1}{2! 2^2} + \dots + \frac{1}{n! 2^n}$$

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .

2) Mque, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}}$

3) Démontrer, par récurrence, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $U_n = \sqrt[n]{e} - I_n$.

4) a) Mque, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n(n!)2^{n+1}}$

b) En déduire $\lim U_n$.

Exercice 51:

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$$

1) Soit $z = x + iy$ l'affixe du point M et $z' = x' + iy'$ celle du point M' .

a) Démontrer que $z' = az$, où a est un nombre complexe que l'on calculera.

b) En déduire que f est une similitude directe et donner sa forme réduite.

2) Soit H l'hyperbole d'équation : $x^2 - 3y^2 = 3$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer ses asymptotes, son excentricité e , son foyer d'abscisse positive F et la directrice D associés.

b) Soit (H') la courbe image de (H) par f . Prouver que (H') est une hyperbole d'excentricité e , de foyer $F' = f(F)$.

3) Déterminer une équation de H' dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. En déduire que H' est la représentation graphique de la

fonction g définie par : $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} (x + \frac{6}{x})$.

4) Soit $d : x = 2$ et $d' = f(d)$

a) tracer d et d' dans le même repère que H'

b) Vérifier que d' coupe H' aux points

$$A_1(1, \frac{7\sqrt{3}}{3}) \text{ et } A_2(3, \frac{5\sqrt{3}}{3})$$

c) Calculer l'aire A de la partie du plan comprise entre la courbe H' et la droite d'

d) Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{\frac{x^2}{3} - 1} dx$

et déduire sa valeur du résultat précédent.

Exercice 52 :

Soit $f_n(x) = \sqrt{1+x} e^{-\frac{x}{n}}$; $x \geq -1$ et $n > 0$, on désigne par C_n la courbe de f_n .

1) Mque toutes les courbes C_n passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2) a) Mque pour tout $n > 0$, la courbe C_n admet une tangente horizontale en un point M_n .

b) On désigne par α_n l'abscisse de M_n .

Etudier la nature de la suite (α_n)

3) Etudier la position relative des courbes C_n et C_{n+1} .

4) On pose $I = \int_{-1}^1 \sqrt{1+x} dx$ et on désigne par (A_n) la suite

définie par $A_n = \int_{-1}^1 f_n(x) dx$

a) calculer I

b) Mque pour tout $n > 0$; $1 - e^{-\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{1}{n+1}} - 1$

c) En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|e^{-\frac{x}{n}} - 1| \leq e^{-\frac{1}{n+1}} - 1$

d) Mque $|A_n - I| \leq \frac{4}{3} \sqrt{2} (e^{-\frac{1}{n+1}} - 1)$

e) En déduire que la suite (A_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 53 :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

On considère les points

$A(3, -2, 2)$, $B(6, 1, 5)$ et $C(6, -2, -1)$

1) Mque le triangle ABC est rectangle

2) Soit $P : x + y + z - 3 = 0$.

Mque P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A .

3) Soit P' le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A .

Déterminer une équation cartésienne de P' .

4) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ , droite d'intersection des plans P et P' .

5) Soit $D(0, 4, -1)$.

a) Mque (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) .

b) Calculer le volume du tétraèdre $ABDC$.

c) Mque l'angle BDC a pour mesure $\frac{\pi}{4}$

6) a) Calculer l'aire du triangle BDC .

b) En déduire la distance du point A au plan (BDC)

Exercice 54:

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$

1) Soit φ la fonction définie sur $[0, 2]$ par $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$

Mque pour tout $t \in [0, 2]$; $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$

b) Déduire que $\frac{3}{2} n(e^{-\frac{2}{n}} - 1) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n(e^{-\frac{1}{n}} - 1)$

c) Mque si (u_n) possède une limite L alors $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$

2)a) Calculer $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$

- b) Montrer que pour tout $t \in [0, 2]$, on a : $1 \leq e^{\frac{t}{2}} \leq e^{\frac{2}{2}}$
c) Mque (u_n) est convergente et déterminer sa limite L.

Exercice 48:

A) Soit $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

- 1)a) Etudier les variations de f
b) Montrer que la courbe C de f admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées. Tracer C de f.
2)a) Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.
b) Soit g la fonction réciproque de f et (C') sa courbe. Montrer que $g(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)$, $x \in J$ et tracer C'.
B) 1) Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = f(x) - x$; Etudier les variations de φ et montrer qu'il existe un réel unique α tel que $\varphi(\alpha) = 0$ et $\ln 2 < \alpha < 1$

2) On pose $I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} \ln\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) dx$

- a) En utilisant une intégration par partie, Calculer I.
b) En déduire en fonction de α , l'aire de la partie (K) du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les deux axes.
3) On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < \alpha$
b) Etudier le sens de variation de (u_n) . En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

c) Soit (v_n) , $v_n = \frac{1}{\alpha - u_n} \int_{u_n}^{\alpha} f(x) dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Mque $u_{n+1} \leq v_n \leq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$, En déduire la $\lim v_n$.

Exercice 49:

A) Soit $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

on désigne par C sa courbe représentative.

- 1) Etudier f et construire sa courbe C.

2) Vérifier que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \frac{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}{2 \tan(\frac{x}{2})}$

puis déduire une primitive de f sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

- 3) Calculer la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équations

$y=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ et $x=\frac{\pi}{2}$

- 4)a) que f est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[1, +\infty[$

- b) Soit $g = f^{-1}$, calculer $g(1)$, $g(\sqrt{2})$ et $g(2)$.

c) M que g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $g'(x) = \frac{-1}{x \sqrt{x^2-1}}$.

B) Soit $F(x) = \int_{\ln \sqrt{2}}^{\ln x} \frac{dt}{\sqrt{e^{2t}-1}}$, $x \in]1, +\infty[$

- 1)a) Mque F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

- b) En déduire que $\forall x \in]1, +\infty[$ on a : $F(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)$.

- c) Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} F(x)$.

Exercice 50:

A) Soit $f(x) = \ln(e^x + 1)$

- 1) Etudier les variations de f_1

2)a) Montrer que $f(x) = x + \ln(e^{-x} + 1)$

- b) Déduire de ce qui précède que la courbe C de f admet deux asymptotes dont on déterminera les équations

- 3) Construire la courbe C de f.

B) Soit $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

- 1) Montrer que F est dérivable sur IR et déterminer le sens de variation de F.

- 2) a) Montrer que $\forall t \geq 0$, $\ln(1+t) \leq t$, établir alors que pour tout $x \leq 0$, $F(x) \geq -1$.

- b) Montrer que, en effectuant une intégration par parties

que $F(x) = x \ln(e^x + 1) + \int_x^0 \frac{te^t}{e^t + 1} dt$

c) Calculer $\int_x^0 te^t dt$.

Montrer alors que $\forall x \leq 0$, $\int_x^0 \frac{te^t}{e^t + 1} dt \leq (1-x)e^x - 1$

- d) Donner un encadrement de F(x) pour $x \leq 0$, puis déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$

3)a) Mque $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = \frac{x^2}{2} + \int_x^0 \ln(1 + e^{-t}) dt$

- b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

- 4) Donner l'allure de la courbe C' de F.

Exercice 51:

1) Soit $h(x) = x - \ln x$, $x > 0$

- a) Etudier les variations de h

- b) En déduire que $h(x) \geq 1$, pour tout $x > 0$

2) Soit : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x - \ln x} ; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Mque f est continue sur $\mathbb{R}^+$

b) f est-elle dérivable en 0+

c) Construire f.

3) Soit v la suite définie par $v_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 t f(t) dt$, $n > 0$

a) Mque pour tout $t > 0$, $f(t) \leq t$

b) Mque la suite v est croissante.

c) En déduire que la suite v est convergente et que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq \frac{1}{2}$$

4) Soit la suite w définie par : $w_n = \int_1^n t f(t) dt$, $n > 0$

a) Mque pour tout $t \geq 1$; $f(t) \leq 1 + \ln(t)$

En déduire que $w_n \leq n \ln(n)$; $n > 0$

b) Calculer $\int_1^n 1 + \frac{\ln(t)}{t} dt$ puis montrer que pour tout

entier n tel que $n \geq 5$; $n \leq w_n \leq n \ln(n)$

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n)$

Exercice 52:

Pour tout $n > 0$ et pour tout x réel négatif, on pose

$$F_n(x) = \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt$$

1) a) Calculer $F_1(x)$ et déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_1(x) = \ln(2)$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_2(x)$; $(\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x})$

2) a) Mque pour tout $n > 0$, on a : $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \frac{1}{n} (1 - e^{nx})$

b) Mque par récurrence sur $\mathbb{N}$, que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tends vers $-\infty$.

On pose dans la suite $R_n = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x)$

3) a) Vérifier que pour tout $t \leq 0$, $2e^t \leq 1 + e^t \leq 2$

b) Mque pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout réel $x \geq 0$,

$$\text{on a : } \frac{1}{2n} (1 - e^{nx}) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2(n-1)} (1 - e^{(n-1)x})$$

c) En déduire un encadrement de R_n , pour $n \geq 2$

4) Pour tout réel négatif x et pour tout entier $n > 0$,

$$\text{on pose : } G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt} dt$$

a) Calculer $G_n(x)$ et mque $\lim_{x \rightarrow -\infty} G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$

b) Mque $G_1(x) + G_2(x) + \dots + G_n(x) = -F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)$

5) On pose, pour tout entier $n > 0$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

a) Mque $u_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} R_{n+1}$

b) Mque la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite

Exercice 53:

Soit $f(x) = \sqrt{1+x} e^{-x}$; $x \geq -1$

1) a) Etudier la dérivabilité de f en -1+

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Calculer la limite de f en $+\infty$

d) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Donner une équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 0.

4) Mque l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et que $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$

5) Tracer la courbe C de f

6) a) Mque $1+x \leq e^x$, pour tout réel x

b) En déduire que $\forall x \geq -1$, on a : $f(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$

7) Soit $\lambda \geq 1$ et $S(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx$

a) Donner une interprétation graphique du réel $S(\lambda)$

b) Mque pour tout $\lambda \geq 1$, on a : $0 \leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$

Exercice 54:

1) Soit $f(x) = x + \ln(\frac{x}{2x+1})$

a) Etudier les variations de f

b) Mque la droite $\Delta : y = x - \ln 2$ est asymptote à C

Etudier la position de Cf par rapport à Δ

c) Mque l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α et que $\alpha \in]1, \frac{5}{4}[$

2) Soit $g(x) = (2x+1)e^{-x}$

a) Etudier les variations de g et Tracer la courbe de g

b) Soit $b > 0$. Déterminer l'aire $A(b)$ de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe C_g et la droite $x=b$

c) L'aire $A(b)$ admet-elle une limite qd b tend vers $+\infty$

3) Mque α est solution de l'équation $g(x) = x$

4) Mque si $1 \leq x \leq \frac{5}{4}$ alors $1 \leq g(x) \leq \frac{5}{4}$

5) a) En étudiant le signe de g'' et les variations de g' ,

montrer que pour tout $x \in [1, \frac{5}{4}]$, $-\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

b) En encadrant $\int_a^b g'(x) dx$,

dem que $\forall a$ et b dans $[1, \frac{5}{4}]$, $|g(b) - g(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|$

6) Soit u la suite définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=g(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout n ; $1 \leq u_n \leq \frac{5}{4}$

b) Prouver que pour tout n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

En déduire que pour tout n ; $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

c) Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près de α et donner une valeur.

Exercice 55

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$f_n(x) = \ln(1+x^n)$ et on pose $u_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$

1) a) Etudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}^+$

b) A l'aide d'une intégration par parties calculer u_1 .
Interpréter graphiquement u_1 .

2) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul, on a : $0 \leq u_n \leq \ln(2)$

b) Etudier la monotonie de (u_n)

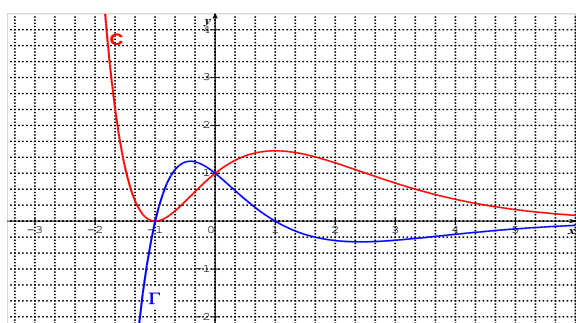
c) En déduire que la suite (u_n) est convergente

3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$; $\ln(1+x) \leq x$

b) En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 61

Partie A : Lecture graphique



On donne dans un repère orthonormé, les courbes C et Γ représentatives de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

On sait que l'une de ces fonctions est la fonction dérivée de l'autre, on peut donc les noter g et g'

1) a- Associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.

b- Dresser le tableau de variation de g .

2) Ecrire l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 0.

Partie C

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$$

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Dans un repère orthonormé (O, i, j) , on note C' la représentation graphique de f .

a. Déterminer les points d'inflexion de C' .

b. Tracer C' dans le repère (O, i, j)

4) a. Déterminer les trois réels a , b et c tels que la fonction F définie par : $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

soit une primitive $\mathbb{R}$ de la fonction f .

b. Soit α un réel positif. Calculer en cm^2 l'aire notée $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C' et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

EXERCICE 56

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n e^{-x}$

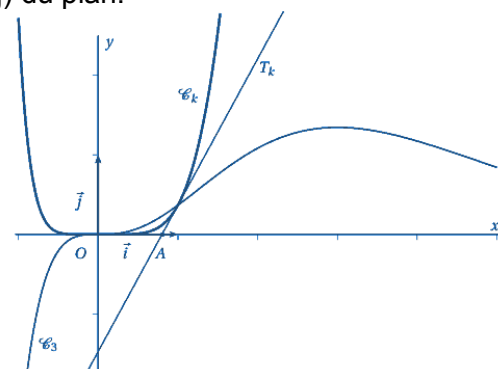
On note C_n sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, i, j) du plan.

Partie A

Sur le graphique ci-contre, on a représenté une courbe C_k où k est un entier naturel

non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe C_3 .

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $(\frac{4}{5}, 0)$.



1. a) Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1 .

c) À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

2. a) Démontrer que pour $n \geq 1$, toutes les courbes C_n passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.

b) Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x ,
 $f'(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$.

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.

Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

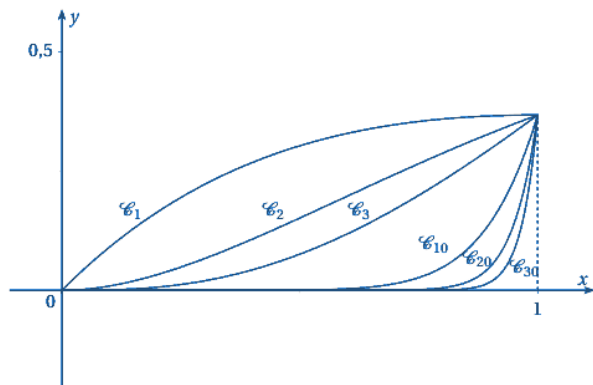
4. a) Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(\frac{k-2}{k-1}, 0)$.

b) En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la

valeur de l'entier k .

Partie B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$



1. Calculer I_1 .
2. Sur le graphique ci-dessus, on a représenté les portions des courbes $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}, C_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leq x \leq 1$.
a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.
b) Démontrer cette conjecture.
c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
d) Déterminer $\lim(I_n)$.

EXERCICE 57 -

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x + e^{-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, i, j) .

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Partie B On considère la suite (u_n) à termes positifs définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}$.

Démontrer que, pour tout réel x positif,

$$\ln(1+x) \leq x.$$

On pourra étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = x - \ln(1+x)$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n+1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(\ln(n)) = \ln(n) + 1/n$.

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n) \leq u_n$.

5. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2

$$u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

6. a) Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou

égal à 2, on a : $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$.

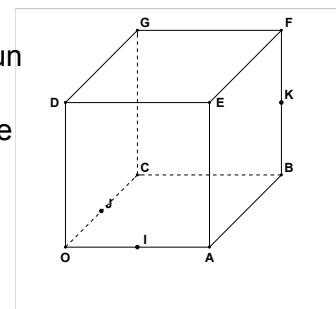
b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$.

7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$.

Démontrer que la suite $(\frac{u_n}{\ln(n)})$ pour $n \geq$ converge vers 1.

Exercice 58

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{OA}, \vec{OC}, \vec{OD})$, on considère le cube $OABCDEFG$. On note I, J et K sont les milieux des arêtes $[OA]$, $[OC]$ et $[BF]$.



- 1)a- Déterminer

les composantes du vecteur $\vec{DI} \wedge \vec{DJ}$

b- En déduire qu'une équation cartésienne du plan $P = (DIJ)$ est : $2x + 2y + z - 1 = 0$

- 2) a- Montrer que la droite (OK) est perpendiculaire au plan P .

b- Soit S la sphère de centre K passant par O .

Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle C dont on déterminera le centre H et le rayon.

- 3) Soit Ω le point d'intersection des droites (OK) et (BD) et S' sphère de centre Ω et passant par O

a- Vérifier que $\Omega(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

b- Déterminer le rapport de l'homothétie de centre O qui transforme S en S' .

c- Soit Q le plan parallèle à P passant par O .

Montrer que Q est tangent à la sphère S en O .

Déduire la position relative de la sphère S' et du plan Q .

Exercice 59 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points :

$A(-2, 1, 1)$; $B(2, 0, -2)$ et $C(2, 1, -1)$

- 1)a) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$

b) En déduire qu'une équation du plan P passant par A, B et C est : $x - 2y + 2z + 2 = 0$

2) $S = \{M(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0\}$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R

b) Montrer que $S \cap P$ est un cercle que l'on caractérisera.

3) Soit h l'application de l'espace dans lui-même, qui à tout point M le point $M' (x', y', z')$ tel que

$$\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y - 6 \\ z' = -2z - 6 \end{cases}$$

- a) Montrer que h est une homothétie de centre I dont on déterminera le rapport
b) Donner une équation cartésienne du plan P' image du plan P par h
c) Quelle est la position relative de P' et S .
d) Calculer le volume du tétraèdre $ABC I$ et en déduire le volume de son image par h

Exercice 60:

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1) On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Donner la loi de probabilité de X .

2) On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. Soit 1

$\leq k \leq n$ et N : la k -ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches. A :

On obtient une boule blanche dans chacun des $k-1$ premiers tirages et une boule noire au k -ième. B :

On obtient une boule blanche dans chacun des $n-k$ derniers tirages.

Calculer $p(A)$, $p(B/A)$ et $p(N)$.

Exercice 61

Un fabricant de jouets vend un modèle de poupée qui "parle et marche" grâce à un mécanisme électronique. On appelle "durée de vie" d'une poupée le temps

pendant lequel le mécanisme fonctionne correctement avant la première défaillance.

La variable aléatoire T , représentant la durée de vie exprimée en années d'une poupée prise au hasard dans la production, suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{3}$

1) a) Déterminer la probabilité p qu'une poupée ne fonctionne plus au bout d'une année.

b) Exprimer, en fonction de t , la probabilité $P(T > t)$ qu'une poupée n'ait aucune défaillance pendant t années.

2) J'ai acheté une poupée. On note A l'évènement : "la poupée n'a aucune défaillance pendant une année" et B l'évènement : "la poupée n'a aucune défaillance pendant trois ans".

a) Déterminer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$ des événements A et B .

b) Sachant que la poupée fonctionne parfaitement au bout d'un an, quelle est la probabilité que la poupée fonctionne encore au bout de trois ans ?

3) Le fabricant garantit les poupées pendant un an et s'engage à rembourser les poupées défectueuses.

a) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près du pourcentage de poupées remboursées.

b) Quelle durée de garantie maximale t_0 devrait proposer le fabricant pour qu'il ne rembourse pas plus de 8% des poupées vendues ?

4) Un commerçant achète un lot de trois poupées et le fabricant offre, pour chaque poupée, une garantie d'une année. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de poupées remboursées sur ce lot.

a) Donner la loi de probabilité de X . Les probabilités seront exprimées en fonction de p .

b) Déterminer, en fonction de p , l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable X .

EXERCICE 62

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.

On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.

Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X < t)$, est donnée par :

$$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0.4$.

2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0.18$.

Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0.4$.

a) On considère un lot de 10 ordinateurs. Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

b) Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?

EXERCICE 63 -

Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Il sera attribué 0,5 point si la réponse est exacte, 0 sinon.

1. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M₁ et M₂. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.

D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70% des acheteurs ont choisi l'ordinateur M₁ et, parmi eux, 60% ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20% des clients ayant acheté un ordinateur M₂ l'ont choisi de couleur blanche.

On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

a) La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M₂ de couleur noire est :

A : $\frac{3}{5}$ B : $\frac{4}{5}$ C : $\frac{3}{50}$ D : $\frac{6}{25}$

b) La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

A : $\frac{21}{50}$ B : $\frac{33}{50}$ C : $\frac{3}{5}$ D : $\frac{12}{25}$

c) Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M₂ est :

A : $\frac{4}{11}$ B : $\frac{6}{25}$ C : $\frac{7}{11}$ D : $\frac{33}{50}$

2. Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues.

Les boules sont indiscernables au toucher.

L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

a) La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

A : $\frac{11}{81}$ B : $\frac{2}{7}$ C : $\frac{5}{84}$ D : $\frac{4}{63}$

b) La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

A : $\frac{2}{7}$ B : $\frac{1}{7}$ C : $\frac{1}{21}$ D : $\frac{79}{84}$

c) On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne. Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'évènement « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

A : 76 B : 71 C : 95 D : 94