

Exercice 1:

On considère la suite u définie par :

$$u_0 = \frac{3}{4} \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{2}u_n.$$

- 1) a / Montrer que pour tout n , $0 < u_n < 1$
 b / Montrer que u est convergente et calculer sa limite .

2) a / Montrer que tout $n : u_{n+1} \leq \frac{7}{8} u_n$

b) Dédire que pour tout $n : 0 < u_n < \frac{3}{4} \left(\frac{7}{8}\right)^n$

- c) Retrouver alors $\lim u_n$.

Exercice 2:

Démontrer chaque réponse si elle est vraie

1) On considère (u_n) positive et la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$$

- a) Pour tout $n \geq 0$ on a $v_n \leq 1$.
 b) Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
 c) Si (v_n) est convergente, alors (u_n) est convergente.
 d) Si (u_n) est croissante, alors (v_n) est croissante.

2) Soit u la suite réelle définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \sqrt{1+u_n}$$

- a) La suite u est convergente.
 b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
 c) On ne peut pas conclure.
 3) Etant donné une suite (x_n) , de nombres réels, définie pour tout entier naturel n , on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$
 a) Si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.
 b) Si les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

4) Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n+1}}$

- a) u est une suite bornée
 b) $\lim (u_n) = 0$
 c) u est une suite décroissante
 d) la suite u n'a pas de limite
 e) Pour tout n , $|u_n| < 1$
 5) Les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier $n > 0$

par : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ sont adjacentes

Exercice 3 :

1) Soit x un réel positif, montrer que pour tout entier naturel n on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$.

2) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \frac{n!}{n^n}$.

a) Montrer que : $\frac{U_n}{U_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

b) Montrer que la suite U est convergente.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

d) Calculer la limite de U .

Exercice 4:

Soit u la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{\sqrt{3+u_n^2}}$

- 1) Montrer que pour tout n , on a $0 \leq u_n < 1$.
 2) a) Montrer que pour tout n , on a : $u_{n+1} > \frac{1+u_n}{2}$
 b) Dédire les variations de la suite u .
 c) Montrer que u est convergente.
 3) Montrer que $\forall n$, on a : $0 < 1-u_{n+1} < \frac{1}{2}(1-u_n)$

4) Trouver la limite de la suite u .

Exercice 5:

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = 1 + u_n + \frac{1}{1+u_n}$$

- 1 / a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n > 0$.
 b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 c) Montrer que $\lim u_n = +\infty$
 2 / a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $1+u_n < u_{n+1}$.
 b) Montrer que $n + \frac{1}{2} \leq u_n ; n \in \mathbb{N}$
 c) Retrouver alors que $\lim u_n = +\infty$

Exercice 6:

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$

- 1°) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \geq 1$.
 2°) On considère les suites (v_n) et (w_n) telles que :
 $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
 a) Démontrer que (v_n) est une suite croissante.
 b) Prouver que (w_n) est suite décroissante.
 3) a) Montrer que $v_n \cdot w_n \geq 3$
 b) Montrer que $0 \leq w_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{2}{3}(w_n - v_n) ; n \geq 0$
 c) Dédire que $0 \leq w_n - v_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (w_0 - v_0)$
 d) Dédire que les deux suites v et w sont adjacentes .
 4°) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente vers une limite que l'on précisera.

Exercice 7:

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 2 \text{ et } U_{n+1} = \frac{2U_n}{\sqrt{U_n+1}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 3$

b) Montrer que la suite U est croissante.

Déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite

2)a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :

$$9 - U_{n+1}^2 \leq 4(3 - U_n) \text{ et que } 3 - U_{n+1} \leq \frac{4}{5}(3 - U_n)$$

b) Déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :

$$3 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ et retrouver la limite de la suite } U$$

3) On considère la suite S définie sur $\mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{U_k - 4}{3 - U_k}$$

$$\text{Mque pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \text{ on a : } S_n \leq -n - \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{4}\right)^k$$

En déduire la limite de la suite S

Exercice 8:

Soit a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n, u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}; \quad v_0 = b \text{ et } \forall n, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1) Mque u et v sont strictement positifs

2) On pose $\forall n, w_n = v_n - u_n$

$$a) \text{ Dque } 0 \leq w_{n+1} \leq \frac{1}{2} w_n$$

$$\text{et en déduire, } \forall n, 0 \leq w_n \leq \frac{b-a}{2^n}$$

b) Déduire $\lim w_n$.

3) Montrer que la suite u est croissante et que la suite v est décroissante

4) Que peut-on déduire pour les suites u et v ?

5) A l'aide de l'étude de la suite $(u_n v_n)$, déterminer la valeur de la limite commune des suites u et v .

Exercice 9:

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout

$$\text{entier } n, u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$$

1)a) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$

b) montrer que la suite u est croissante

c) En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite

2) Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$

a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n^2$

b- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (v_0)^{2^n}$

c- Exprimer alors u_n en fonction de n

d- En remarquant que pour tout entier n , on a :

$$2^n \geq n, \text{ retrouver la limite de la suite } u$$

Exercice 10:

Soit u la suite sur $\mathbb{N}$ par u_0 donné

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 1); n \in \mathbb{N}$$

1) On suppose $0 \leq u_n < 1$

a) Mque pour tout n de $\mathbb{N}$ $0 < u_n < 1$.

b) Mque la suite est croissante. En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

c) soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1 - u_n$.

$$\text{Calculer } \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \text{ en fonction de } u_n.$$

$$\text{En déduire que l'on a } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2}$$

$$2) \text{ On pose } t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+u_k}$$

$$3) a) \text{ Mque } t_n = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0}, \text{ déduire que } \lim t_n = +\infty$$

4) On suppose dans cette question que $u_0 > 2$

a) Mque la suite u est croissante et non majorée.

Déduire que u diverge vers $+\infty$.

$$b) \text{ Montrer par récurrence que } \forall n, u_n \geq 2 \left(\frac{u_0}{2}\right)^{2^n}$$

Exercice 12:

Soit u la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{k}{3^k}$

$$1) a) \text{ M que } \forall n > 0, u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{3^{2n+2}} [-4n - 1]$$

En déduire la monotonie de la suite u_{2n}

2) Mque la suite (u_{2n+1}) est croissante

3) Mque pour tout $n > 0, u_{2n} > u_{2n+1}$

b) Calculer $\lim(u_{2n} - u_{2n+1})$

4) Mque la suite u est convergente vers un réel α tel que $u_3 < \alpha < u_2$.

Exercice 13:

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 2$

$$\text{et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2 + \frac{n^2}{u_n}$$

1) a) Mque $\forall n \geq 2$; on a : $n < u_n < n+1$, déduire $\lim u_n$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2) Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$v_n = \frac{1}{-n + u_n} - 1$$

$$a) \text{ Calculer } v_1 \text{ et montrer que } v_{n+1} = \frac{1}{v_n + \frac{1}{n}}$$

b) M par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1$

c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - n)$

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k v_k$

a) Mque $\forall n \in \mathbb{N}^* ; S_n - \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k [v_k - 1]$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^* ; |S_n - \frac{n+1}{2n}| \leq \frac{1}{n}$

c) Montrer alors que la suite (S_n) est convergente.

Exercice 14:

Soit u la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n} \end{cases}$$

1° Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

2° a) Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2 \geq 4$

b) En déduire que $u_n \geq 2\sqrt{n}$

c) Déterminer alors la limite de la suite u .

3° Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$.

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n \leq 4 + \frac{1}{n}$

b) Déterminer alors la limite de la suite v .

4° a) Mque pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$.

5° Soit s la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $s_n = \sum_{k=1}^n v_k$

a) Montrer que $s_n \leq 4n + 2\sqrt{n}$.

b) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n^2}{n} \right)$

Exercice 15:

Pour tout entier n strictement positif, on définit la

fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{n+x^2}$

et la suite (u_n) par :
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+n(u_n)^2} \end{cases}$$

1) Etudier les variations de f_n sur $[0, +\infty[$

2) On pose, $\forall n$ non nul, $a_n = n u_n$

a) Vérifier que, $\forall n \geq 1 ; a_{n+1} = (n+1) f_n(a_n)$

b) Dém par récurrence que $\forall n \geq 2 ; 0 < a_n < 1$

(On pourra utiliser les variations de f_n sur $[0, 1]$)

3) a) Prouver que, pour tout $n \geq 2 ; 0 < u_n \leq \frac{1}{n}$

b) Déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite

4) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

Exercice 16:

Soit s la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

1) a) Montrer que pour tout $n \geq 1 ; s_n \geq \frac{n}{\sqrt{n}}$

b) La suite s est-elle convergente ?

2) Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

3) On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$

par : $u_n = 2\sqrt{n} - s_n$ et $v_n = u_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$

a) Démontrer que les suites u et v sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{2\sqrt{n}}$

Exercice 11

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 4 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad n > 0$$

1° a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b) Montrer par l'absurde que la suite (u_n) n'est pas majorée.

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2° a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq n+2$.

b) Retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3° Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \frac{1}{u_1-1} + \frac{1}{u_2-1} + \dots + \frac{1}{u_n-1}, \quad n \geq 1.$$

a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n ,

$$\frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{u_n-2} - \frac{1}{u_{n+1}-2}.$$

b) Montrer que la suite (v_n) admet une limite finie que l'on calculera.