

Exercice1

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}^*$

- 1)a) Justifier l'existence de I_n . puis calculer I_1 et I_2 .
b) Montrer que I_n est une suite décroissante.
c) Dédire que I_n est une suite convergente.
- 2)a) Montrer que $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
c) En déduire la limite de I_n .
- 3) On pose $f(n) = I_{n+4} - I_n$
a) Calculer $f(n)$ en fonction de n , $n \in \mathbb{N}^*$
b) Calculer $f(2) + f(6) + \dots + f(4k-2)$ en fonction de I_2 et de I_{4k+2} .

c) En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} [1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4k-1} + \frac{1}{4k+1}]$

Exercice :2

Soit Δ une droite du plan et O un point de Δ .

On considère la similitude indirecte S de centre O , d'axe Δ et de rapport 2.

1) Soit M un point du plan n'appartenant pas à Δ

- a) Construire les points $M_1 = S(M)$ et $M_2 = S(M_1)$
b) Justifier que les points O , M et M_2 sont alignés.

2)a) Montrer que $(\overrightarrow{M_1O}, \overrightarrow{M_1M}) \equiv (\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_2M}) [2\pi]$

b) En déduire que la droite (OM_1) est tangente au cercle circonscrit au triangle MM_1M_2 .

3) A , B et C sont trois points non alignés tels que $AB \neq BC$

Construire le centre et l'axe de la similitude indirecte σ tel que $\sigma(A) = B$ et $\sigma(B) = C$

Exercice :3

Soit $(E) : 8x + 9y = -10$

- 1)a) Vérifier que $(1; -2)$ est une solution de (2)
b) Dédire les solutions de (2)

2) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

On considère les plans P et Q .

$$P : x + 2y - z = -2 ; Q : 3x - y + 5z = 0$$

a) Montrer que P et Q sont sécants selon une droite D

b) En déduire que l'ensemble E des points de D dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Exercice 4 :

1. Montrer que, pour tout entier relatif n , les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation $(E) : 87x + 31y = 2$

(a) Vérifier, en utilisant par exemple la question 1. que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0; y_0)$ de (E) .

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

(c) Application : Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées

sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Exercice 7:

Dans le plan orienté, on considère un triangle IAB

rectangle et isocèle tel que $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

On désigne par J , K et L les milieux respectifs des segments $[AI]$, $[IB]$ et $[AB]$

1)a) Montrer qu'il existe un déplacement unique f tel que $f(A) = I$ et $f(I) = B$.

b) Caractériser f .

2) Soit g l'antidépacement tel que $g(A) = I$ et $g(I) = B$

a) Montrer que g est une symétrie glissante.

b) Déterminer la forme réduite de g .

c) Construire le point $L' = g(L)$.

Montrer que $LIL'B$ est un carré.

3) On pose $h = t_{IA} \circ g$

a) Déterminer $h(L)$

b) Caractériser alors h

4) On pose $\varphi = t_{AB} \circ S_{AB}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ .

Exercice 8:

Soit $E : z^2 - 2e^{i\alpha} \cos 2\alpha z + e^{2i\alpha} = 0$; $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

1) Résoudre E lorsque $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

2)a)Vérifier que $z_1 = e^{-i\alpha}$ est une solution de E.

b)Déterminer alors la deuxième solution z_2 de E.

3)Dans le plan complexe (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) on désigne par A le point d'affixe z_1

et par B le point d'affixe z_2

a)Déterminer l'affixe du point C tel que OABC soit un parallélogramme.

b)Déterminer les valeurs de α pour que OABC soit un losange.

Exercice 9:

Soit A, I, J trois points non alignés et α non nul. On désigne par R_I et R_A les rotations de centres respectifs I et A et d'angle α .

On pose $B = R_I(A)$, $C = R_I(J)$ et $D = R_A(J)$.

1)a)Soit $f = R_A \circ R_I^{-1}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

b)Dédire que ABCD est un parallélogramme.

2)On suppose que ABCD est un carré tel que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Soit M un point de [AB], distinct de A et B.

La parallèle à (BC) passant par M coupe [DC] en N et la parallèle à (AC) passant par M coupe [BC] en P.

a)Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie D en C et N en P

b)Montrer que R est une rotation.

Préciser son angle..

b)M que $R(C) = B$, puis déterminer le centre de R.

3)Soit $H = R \circ S_{(BD)}$.

Montrer que H est une symétrie orthogonale par rapport à une droite que l'on précisera.

4)Soit g l'antidépacement qui envoie D en C et N en P.

a)Vérifier que $g = R \circ S_{(DN)}$.

b)Montrer que $g(C) = B$.

c)Dédire que g est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

Exercice :10

$$\text{Pour tout } n \geq 1, I_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{1-t} dt, x \in \mathbb{R}$$

1)Calculer $I_1(x)$

2)a)En intégrant $I_n(x)$ par parties,

calculer $I_{n+1}(x) - I_n(x)$, ($n \geq 1$)

b)Dédire que $I_n(x) = e - (1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!})e^{1-x}$.

3)On suppose maintenant que x est un élément fixé de]0, 1]

a)Démontrer que, pour tout $n > 0$,

$$0 \leq I_n(x) \leq \frac{1}{n!} e (1 - e^{-x})$$

b)Dédire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x)$

c)Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}) = e^x$.

Exercice :11

Soit ABCD un carré de centre O tel que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} (2\pi).$$

On désigne $I = A \cdot B$ et $J = A \cdot D$

On note s la similitude directe tels que

$$s(D) = O \text{ et } s(C) = I.$$

1) a) Déterminer le rapport et l'angle de s.

b) Soit Ω le centre de s.

Trouver une construction géométrique de Ω .

2) a) Préciser les images respectives des droite

(BD) et (BC) par s.

b) Déterminer alors s(B) et s(A) et s o s(B).

c) Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (B, 1) et (J, 4).

3) On suppose dans cette question que

(A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$) un repère orthonormé direct

a) Déterminer l'application complexe associée à s.

b) En déduire l'affixe z_0 de Ω centre de s.

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

et $h = R \circ s$.

a) Préciser h(B) puis caractériser h.

b) Soit Ω' le milieu de $[\Omega B]$.

Montrer que $O\Omega\Omega'$ est rectangle et isocèle.

Exercice :12

1) Démontrer la propriété suivante :

Une similitude ayant deux points fixes distincts est l'identité du plan ou une symétrie orthogonale.

2) Dans le plan complexe on considère la similitude s d'écriture complexe :

$$z' = -i\bar{z} + 1 + i. \text{ Soit } A \text{ d'affixe } 1 \text{ et } B \text{ d'affixe } i.$$

a) Démontrer que A et B sont invariants par s .

b) Quel est l'image du point O par s .

c) Caractériser alors s .

3) Soit h l'homothétie de centre $\Omega(\frac{1}{2}(1+i))$ et de

rapport $\sqrt{2}$. Caractériser $\sigma = h \circ s$

Exercice 13:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-x)e^{2x}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Dresser le tableau de variation de f .

2°) a) Montrer que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion I qu'on précisera.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point I .

c) Tracer T et $\mathcal{C}$.

3) Calculer l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

4°) On pose $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 2I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{2^n}{n!} I_n$

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } U_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$.

a) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

6°) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } U_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + U_n$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : }$

$$U_n = \frac{1}{2} \left[e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right].$$

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!}$

Exercice :14

A) Soit la fonction f définie sur $] -1, 1[$ par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt$$

1) a) Justifier l'existence de f .

b) Prouver qu'il existe trois réels α, β et φ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, \frac{t^2}{1-t^2} = \alpha + \frac{\beta}{1-t} + \frac{\varphi}{1+t}$$

c) Déduire que $\forall x \in] -1, 1[, f(x) = -x + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

2) Étudier les variations de f et construire sa courbe C dans un repère orthonormé.

3) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ on a : }$

$$\ln(x) \leq -1 + \frac{x}{k} + \ln k$$

b) Déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{-\frac{1}{2}+k}^{\frac{1}{2}+k} \ln(x) dx \leq \ln(k)$

et que $\forall n \in \mathbb{N}^* \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(n!)$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\ln(n!) \geq (n + \frac{1}{2}) \ln(n + \frac{1}{2}) - n + \frac{1}{2} \ln 2$$

4) Soit la suite u définie par sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = n + \ln(n!) - (n + \frac{1}{2}) \ln(n)$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{1}{2} \ln 2,$

b) Vérifier que $\forall n \geq 1, \text{ on a : }$

$$u_n - u_{n+1} = (2n+1) f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$$

c) Déduire que la suite u est convergente.

B) Soit (v_n) la suite définie par :

$$v_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^1 x^{n/2} \sqrt{1-x} dx$$

1) Calculer v_0

2) a) Définir l'ensemble des points

$$M(x, y) \text{ tel que } y^2 - x(1-x) = 0$$

b) Déduire que $v_1 = \frac{\pi}{8}$

3a) Prouver que la suite (v_n) est décroissante.

b) Déduire que la suite v est convergente.

4a) Prouver par une intégration par partie que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{n+2}{n+5} v_n$$

b) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+2}{n+5} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$$

5a) Prouver par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n v_{n+1} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

b) By making appear the quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ into the

preceding expression prove that: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/2} v_n = \sqrt{2\pi}$

6) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, v_{2p} = \frac{2}{(2p+1)(2p+3)} \cdot \frac{(2^p \cdot p!)^2}{(2p)!}$

C) 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{u_n} = \frac{n!}{n^{n+1}} e^n$

2) Exprimer $e^{2up - u_{2p}}$ en fonction de p et v_{2p} , ($p \in \mathbb{N}^*$)

3) Soit l la limite de u

Déduire de ce qui précède que $l = \ln(\sqrt{2\pi})$

Exercice : 15

I/ Soit x un réel de $]-1, +\infty[$, on pose $\varepsilon_2(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt$

1a) $x \in \mathbb{R}^+$, mque, $0 \leq \varepsilon_2(x) \leq \frac{x^3}{3}$

b) $x \in]-1, 0]$, mque $\frac{x^3}{3(1+x)} \leq \varepsilon_2(x) \leq 0$

c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_2(x)}{x^2} = 0$

2a) Démontrer que pour tout x de $]-1, +\infty[$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \varepsilon_2(x)$$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

3) Soit f la fonction numérique à variable réelle

définie sur $]-1, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

a) Mque f est continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$

b) Etudier les variations de la fonction h définie sur

$]-1, +\infty[$ par $h(x) = x - (x+1)\ln(1+x)$

En déduire le signe de $h(x)$ pour $x \in]-1, +\infty[$

c) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un

repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II/ Soit $x \in]-1, 0]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varepsilon_n = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$

1) Etudier le signe de $\varepsilon_n(x)$ suivant n est pair ou impair.

b) Etudier le signe de $\varepsilon_n(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$,

en déduire que $|\varepsilon_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$

2a) Mque $\forall t \neq -1$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

b) En déduire que $\forall x$ de $]-1, 0]$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \varepsilon_n(x)$$

3) On considère la suite u définie par:

$$u_n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} \right]$$

Trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$

Exercice 18 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f

dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est définie sur $[1, +\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

Interpréter graphiquement.

2) a. Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$

$$\text{et que } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement

le résultat obtenu.

b) Tracer la courbe (C).

4) a) Montrer que f est bijective et tracer, dans le même repère, la courbe (C') de sa fonction réciproque f^{-1} .

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

5) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit S le solide obtenu par la rotation de la partie de (C') relative à $[0, 1]$ autour de l'axe $(O, \vec{i})$. Calculer le volume de S.

6) En intégrant par parties, calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives: $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice :19

A tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur

$]-1, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$,

on désigne par C_n sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

A) 1) a) Dresser le tableau de variation de f_n

b) Mque pour tout $x > -1$, $f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$

2) Etudier les positions relatives des courbes C_1 et C_2 puis construire C_1 et C_2 .

3) a) Montrer que l'équation $f_2(x) = x$ admet dans $[\frac{1}{2}, 1]$ une solution unique α

b) Etudier les variations de f_2 dans $[\frac{1}{2}, 1]$ et en

déduire qu'il existe un réel $k \in]0, 1[$ tel que $|f'_2(x)| \leq k$

4) Soit u la suite définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f_2(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$

b) M que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq k |u_n - \alpha|$ et que $|u_n - \alpha| \leq k^n \frac{1}{2}$, en déduire la limite de u.

B) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

1) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b) Déduire que la suite (I_n) est convergente.

2) Mque $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$;

$$\frac{1}{n-1} (1 - (\frac{1}{2})^{n-1}) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} (1 - (\frac{1}{2})^{n-1})$$

en déduire la limite de (I_n)

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $n I_{n+1} = 1 + I_n - \frac{e}{2^n}$

b) Calculer la limite de $n I_{n+1}$ et celle de $n I_n$.

C) Soit $F(x) = \int_0^{2 \ln x} f_1(t) dt$ $x \geq 1$

1) a) Justifier l'existence de $F(x)$ pour $x \geq 1$.

b) Montrer que F est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$

c) En déduire que $\forall x \geq 1$, $F(x) = \int_1^x \frac{2t}{1+2 \ln t} dt$

2) M que $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^t \geq 1+t$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

3) a) Montrer que $\forall x \geq 2$, $F(x) \geq \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{2t}{1+2 \ln t} dt$

b) Montrer que $\forall x \geq 2$, il existe un réel $c \in [\frac{x}{2}, x]$

tel que $F(x) \geq \frac{cx}{1+2 \ln c}$

c) En déduire que $\forall x \geq 2$, $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{x}{2(1+2 \ln x)}$

puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

4) a) Dresser le tableau de variation de F.

a) Montrer que la courbe Γ de F admet un point d'inflexion d'abscisse $\sqrt{e}$

b) Tracer l'allure de Γ . On donne $\varphi(\sqrt{e}) \approx 1, 2$.

Exercice :21

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AC = 2AB$ et $(\vec{AC}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $D = S_A(B)$.

On désigne par F le projeté orthogonal de A sur BC], I le symétrique de F par rapport à (AB) et J le symétrique de F par rapport à (AC).

1) a) Montrer que les droites (IB) et (IA) sont perpendiculaires

ainsi que les droites (CJ) et (AJ).

b) Caractériser $S_{(AC)}$ ou $S_{(AB)}$.

et en déduire que A est le milieu de [IJ]

2) Soit S la similitude directe qui transforme B en A

et A en C.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Montrer que F est le centre de S.

c) Montrer que $S(I)=J$. En déduire $CJ=IJ$.

3) Soit $\psi = S \circ S_{(AC)}$

a) Préciser la nature et le rapport de ψ .

b) Déterminer $\psi(A)$ et $\psi(D)$.

c) Soit W le centre de ψ et Δ son axe et G le point

défini par $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CD}$.

M que $WC = \frac{4}{3} DC$ et que Δ est la médiatrice de $[AG]$.

4) Soit $f = S_{(AG)} \circ \psi$

a) Déterminer $f(D)$

b) Mque f est une homothétie que l'on précisera.

Exercice :25

A) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)e^{(2-x)}$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, i, j)

1) Etudier les variations de f puis construire sa courbe $\mathcal{C}$.

2)a) Soit $\alpha > 1$. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$ et les droites d'équations :

$y=0$, $x=1$ et $x=\alpha$

b) Calculer la limite de $A(\alpha)$ qd α tend vers $+\infty$.

B) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ et g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x)=(x-1)^n e^{(2-x)}$

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe de g_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1)a) Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n = 0$

b) Dresser le tableau de variation de g_n
(on distinguera les cas n pair et n impair)

c) En déduire que $\forall x \geq 1$ on a : $0 \leq g_n(x) \leq e^{1-n} n^n$.

2) On pose $J_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 (x-1)^n e^{2-x} dx$

a) Interpréter géométriquement J_1 .

b) Montrer que $J_{n+1} = J_n - \frac{1}{(n+1)!}$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$J_n = e - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq J_n \leq \frac{e}{n!}$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} (J_n)$

e) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$

C) soit $F(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^{2-t}}{t-1} dt$; $x \in]1, +\infty[$ par

1)a) Montrer F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que

$$F'(x) = \frac{e^{1-x} [(e-1)x + 1]}{x(1-x)}$$

b) En déduire le sens de variation de F sur $]1, +\infty[$.

2)a) A l'aide de la fonction f de la partie A montrer

$$\text{que } 0 < \frac{e^{2-t}}{t-1} \leq \frac{1}{(t-1)^2}, \forall t > 1$$

b) En déduire que $\forall x > 1$ on a :

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x(x-1)}. \text{ Calculer alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

3)a) Montrer que $\forall x \in]1, 2]$ et $\forall t \in [x, x+1]$

$$\text{on a : } \frac{e^{2-t}}{t-1} \geq \frac{e^{1-x}}{t-1}$$

b) En déduire que $F(x) \geq e^{1-x} [\ln(x) - \ln(x-1)]$

puis calculer $\lim_{x \rightarrow 1+} F(x)$

c) Dresser alors le tableau de variation de F .

Exercice :22

Soit $f_n(x) = (1 + \sin x + \sin^2 x + \dots + \sin^n x) \cos x$.

On pose $I_n = \int_{-\pi/2}^0 f_n(x) dx$

1) Calculer I_1 .

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$

b) En déduire que $I_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$

3) Soit $a_n = I_{2n}$ et $b_n = I_{2n+1}$.

a) Montrer que la suite (a_n) est décroissante et que la suite (b_n) est croissante.

b) Démontrer que la suite $(a_n - b_n)$ converge vers 0.

4) Soit $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ et $I = \int_{-\pi/2}^0 f(x) dx$.

a) Calculer I .

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [-\pi/2, 0]$, on a :

$$\begin{cases} f(x) - f_n(x) = (\sin x)^{n+1} f(x) \\ f_{2n+1}(x) \leq f(x) \leq f_{2n}(x) \end{cases}$$

c) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $b_n \leq I \leq a_n$

d) Déduire alors que les suites (a_n) , (b_n) et (I_n) convergent vers la même limite I .

Exercice 23:

I) On considère l'équation (E) : $7x + 18y = 1$ d'inconnues x et y entiers relatifs.

1°) Justifier pourquoi (E) possède-elle au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? (Sans en proposer une solution particulière).

2°) Déterminer une solution particulière (x_0, y_0) de (E).

3°) Résoudre (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

II) Pour tout entier naturel non nul n , on appelle U_n l'entier naturel qui s'écrit avec n chiffres 1

Exemple : $U_1 = 1$; $U_2 = 11$; $U_4 = 1111$.

1°) Pour chacune des affirmations ci-dessous dire si elle est vraie ou fausse en justifiant :

a) Pour tout entier $n \geq 2$, U_n est premier.

b) Pour tout entier $n \geq 2$, $U_n \equiv 1 \pmod{5}$

c) U_6 est multiple de U_3 .

2°) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, Calculer $(U_{n+1} - 10 \cdot U_n)$ et en déduire que U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $9 \cdot U_n = 10^n - 1$

c) Démontrer que si n est un multiple de d alors $10^n - 1$ est un multiple de $10^d - 1$.

En déduire que si d divise n alors U_d divise U_n .

d) Démontrer que si U_n est premier alors n est premier. Que pensez-vous de la réciproque ?

3°) Recherche du PGCD(U_7, U_{18})

a) Déduire de I) un couple d'entiers naturels

(p, q) tel que : $7p - 18q = 1$

b) Démontrer que $(10^{7p} - 1) - 10(10^{18q} - 1) = 9$ et en déduire que : $U_{7p} - 10 \cdot U_{18q} = 1$.

c) Déduire de 2°) c) le PGCD(U_7, U_{18})

Exercice 24

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}^*$

$$\text{par : } U_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx.$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$.

b) Montrer que U est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a) En intégrant par parties, calculer U_1 .

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_{n+1} - (n+1)U_n = -\frac{1}{e}$$

c) En déduire la valeur de U_2 .

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{ne}$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice 25

1°) Soient a et b deux entiers et n un entier naturel non nul

a) Démontrer la propriété suivante :

si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$.

b) La réciproque de la propriété précédente est-elle vraie ? Justifier

2°) a) Déterminer le reste de la division de 2011 par 11

b) Déterminer le reste de la division de 2^{10} par 11.

c) Déterminer le reste de la division de $2^{2010} + 2011$ par 11.

3°) On désigne par p un entier naturel. Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $A_n = 2^n + p$. On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1} .

a) Montrer que d_n divise 2^n .

b) Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p .

c) En déduire le PGCD de $2^{2010} + 2011$ et $2^{2011} + 2011$

Exercice 26

Dans la figure représentée sur la page (3/3)

* Γ est un cercle de diamètre $[AC]$ et de centre O

* B est un point de Γ distinct de A et de C .

*D est le point tel que le triangle BCD est équilatéral direct.

I) 1°) Soit G le centre de gravité du triangle BCD et le point M intersection des droites (AB) et (CG).

a) Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment [BC]

b) Montrer que le point G est le milieu du segment [CM].

2°) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe S de centre C et qui transforme B en M.

II) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ choisi de telle sorte que A et C ont

pour affixes respectives -1 et 1.

1°) Déterminer l'abscisse du point E tel que le triangle ACE est équilatéral direct.

2°) Soit σ la similitude directe d'expression

$$\text{complexe: } z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4} \cdot z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{4}$$

Déterminer les éléments caractéristiques de σ .

Déduire que σ est la réciproque de S.

3°) Déterminer l'abscisse du point E' image de point E par σ . Montrer que E' est un point de Γ .

4°) On désigne par Φ l'ensemble des points M lorsque B décrit le cercle Γ privé des points A et C.

a) Montrer que E appartient à Φ .

b) Soit O' l'image de O par la similitude S.

Démontrer que O' est le centre de gravité du triangle ACE.

c) Déterminer Φ .

Exercice :27

I°) 1°) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$$

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} = +\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

b) Dresser le tableau de variation de g.

2°) Soit G la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$G(x) = g(x) - \int_0^{g(x)} \frac{dt}{1+t^2}$$

a) Montrer que G est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que

$$G'(x) = g(x)$$

b) Montrer alors que pour tout réel $x > 0$,

$$\int_0^x g(t) dt = g(x) - \int_0^{g(x)} \frac{dt}{1+t^2}$$

c) On admet que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Déduire que } \int_0^{\ln \sqrt{2}} g(t) dt = 1 - \frac{\pi}{4}$$

II°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\ln \sqrt{2}} (g(x))^n dx \text{ et } I_0 = \ln \sqrt{2}$$

1°) a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel positif x, on a :

$$(g(x))^n + (g(x))^{n+2} = \frac{1}{2} U'(x) \cdot (U(x))^{\frac{n}{2}} \text{ où}$$

$$U(x) = e^{2x} - 1$$

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et déterminer sa limite.

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $U_n = I_{n+4} - I_n$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^n U_{4k+1} = I_{4n+5} - I_1$

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = (I_{n+4} + I_{n+2}) - (I_{n+2} + I_n).$$

$$\text{En déduire que } U_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2}.$$

c) Exprimer alors U_{4n+1} en fonction de n.

Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la

$$\text{somme } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{-1}{4n+3} + \frac{1}{4n+5}$$

Exercice :28

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}^*$

$$\text{par : } U_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx.$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$.

b) Montrer que U est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a) En intégrant par parties, calculer U_1 .

$$\text{b) Mque pour tout } n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} - (n+1)U_n = -\frac{1}{e}$$

c) En déduire la valeur de U_2 .

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{ne}$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice 29:

1°) Dans $\mathbb{Z}^2$, on considère l'équation

$$195x - 232y = 1.$$

a) Déterminer le PGCD des deux nombres 195 et 232.

b) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{(163 + 232k, 137 + 195k), k \in \mathbb{Z}\}.$$

c) Déterminer l'unique entier naturel d vérifiant $0 \leq d \leq 232$ et $195d \equiv 1 \pmod{232}$.

2°) Montrer que 233 est un nombre premier.

3°) Soit a et b deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 232.

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de a^{232} par 233.

b) Montrer que $a^{195} \equiv b \pmod{233}$ si et seulement si $a \equiv b^{163} \pmod{233}$.

Exercice :30

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un carré de centre O tel que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

On note $J = A * D$, $K = C * D$ et $F = S_D(C)$.

La perpendiculaire en D à la droite (BD) coupe (OJ) en un point E.

1) Soit S la similitude directe telle que $S(A) = J$ et $S(B) = D$.

a- Déterminer le rapport et l'angle de S.

b- Déterminer les images des droites (BD) et (AD) par la similitude S. En déduire S(D).

2) On désigne par ζ et ζ' les cercles de diamètres respectifs [AJ] et [BD].

a- Soit Ω le centre de S. Montrer que $\Omega \in \zeta \cap \zeta'$ puis construire le point Ω .

b- Montrer que les points Ω , B et E sont alignés.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(K) = B$.

a- Déterminer le rapport de σ .

Montrer que C est le centre de σ .

c- Déduire l'axe de σ .

4- Soit $\varphi = S \circ \sigma$.

a- Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(K)$.

a- Caractériser alors φ .

Exercice :31

1) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = a \ln^2(x) + b \ln(x) ; a \text{ et } b \text{ deux réels.}$$

Déterminer les réels a et b sachant que h admet un

(E) : minimum en $e^{\frac{1}{2}}$ égale à $(-\frac{1}{4})$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln^2(x) - \ln(x).$$

On désigne par c la courbe représentative de

dans un plan rapporté à un repère orthonormé

a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b- Montrer que tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{2 \ln(x) - 1}{x}$.

c- Dresser le tableau de variation de f .

d- Préciser les points d'intersection de c avec l'axe des abscisses.

e- Tracer la courbe c .

(On précisera les branches infinies).

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle

$$I =]0, e^{\frac{1}{2}}].$$

a- Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g .

b- Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans I une unique solution α et que $\alpha \in]0, 1]$.

c- Tracer la courbe c' de g^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

d- Montrer que tout $x \in J$; $g^{-1}(x) = e^{\frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}}$.

4) Soit $A = \int_a^1 f(x) dx$.

a- Interpréter graphiquement A

b- Calculer A .

c- En déduire la valeur de $K = \int_0^a e^{-\sqrt{x + \frac{1}{4}}} dx$.
 $\sigma(O) = A$

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$
et C_f sa courbe représentative :

1) Dresser le tableau de variation de f

2) Montrer que la tangente Δ à C_f au point d'abscisse

2 a pour équation : $y = \frac{e^2}{8}(x - 2)$

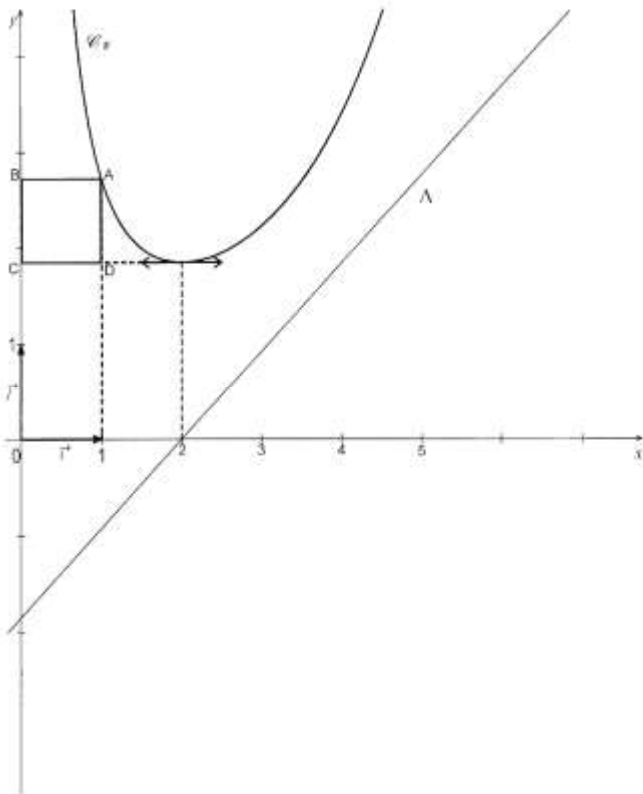
3) Soit $g(x) = \frac{e^x}{x^3}$

a) Étudier les variations de g .

b) Montrer que $g(x) = \frac{e^2}{8}$ admet dans $]3, +\infty[$ une solution unique α telle que $4.2 < \alpha < 4.3$

- b) Déduire la position relative de Cf et Δ .
4) Justifier l'existence sur $\mathbb{R}^+_{*}$ d'une primitive F telle que $F(1) = e$
4) Ci-dessous on trace la courbe Cf de F, la droite Δ et le rectangle ABCD tel que $A(1, e)$; $B(0, e)$; $C(0, F(2))$ et $D(1, F(e))$
a) Étudier les branches infinies de Cf
b) Tracer la courbe Cf sur la fig ci-dessous
6) Soit $t \in [1, 2]$. On désigne par $S(t)$ la partie du limitée par la courbe Cf, l'axe (O, i) et les droites d'équations $x=t$ et $x=2$. On désigne par $A(t)$ l'aire de $S(t)$
a) Exprimer $A(t)$ en fonction de $F(t)$.
b) Hachurer $S(1)$ et justifier quelle a la même aire que le rectangle ABCD.
c) Montrer qu'il existe un unique $t_0 \in [1, 2]$ $A(t_0) = \frac{1}{2}A(1)$
d) Construire le point de Cf d'abscisse t_0 .

ANNEXE A RENDRE AVEC LA FEUILLE DE COPIE



4/4

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique 2 cm)

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
c) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ .
- 2) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	3	+
$f(x)$	-1	$+\infty$

- a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}_+$, une seule solution α et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
b) Tracer la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}$.
(On précisera la demi tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et on prendra $\alpha \approx 0,4$).
- 3) On désigne par (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_{\alpha}^1 (f(x))^n dx$.
a) Calculer u_1 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 (4 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 0 & ; & u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \\ v_0 = 1 & ; & v_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $u_n \leq v_n$.
- 2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
- 3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.
- 4) Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 9u_n + 5v_n$.
a) Montrer que (w_n) est une suite constante.
b) En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 32

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC

isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi]$

Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC, I le milieu du segment [BC], J le milieu du segment [AB] et L le milieu du segment [AC]

1°) Montrer que OBAC est un losange.

2°) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que f(A) = C et f(B) = A.

a) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b) Montrer que $f = R_{\left(O, \frac{\pi}{3}\right)} \circ S_{(AB)}$.

b) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de $R_{\left(O, \frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

3°) Soit l'isométrie $\varphi = S_{(BC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.

a) Montrer que $S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = S_{(AO)} \circ S_{(AC)}$.

En déduire que $\varphi = S_{(IK)} \circ S_{(IJ)} \circ S_{(AC)}$ où K est le projeté orthogonal de I sur (AC).

b) Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont précisera l'axe et le vecteur.

4°) Soit g une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le triangle ABC.

a) Montrer que g fixe le point O.

b) Montrer que $g([BC]) = [BC]$.

c) Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

Exercice 33 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A(i) et B(i+1). On considère l'application

$f: P \setminus \{A\} \rightarrow P : M(z) \rightarrow M'(z') \text{ tel que } z' - i = \frac{2}{z + i}$.

1) Montrer que les points A, M et M' sont alignés.

2) Déterminer l'ensemble ζ des points invariants par f

3) Dans cette question, on suppose que $z = 1 + i e^{i\theta}$

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ décrit par le point M d'affixe z lorsque θ décrit $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

b) Montrer que $z' - i = 1 + i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

c) En déduire l'ensemble Γ' image de Γ par f. Le construire.

Exercice 33: (6 points)

Soit m un paramètre complexe. On considère dans C l'équation:

(E) : $z^2 - 2(m+i)z + 2m^2 - 2im - 5 = 0$.

1) Résoudre dans C l'équation (E).

2) Dans la suite le plan P est muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v). On désigne par M, J, N et N' les points d'affixes respectives m, -1+2i, (1+i)m + 2+i et (1-i)m - 2+i

Soit f l'application qui au point N associe le point N'

a) Montrer que l'écriture complexe associée à f est: $z' = -iz - 3 + 3i$.

b) Caractériser f ; ω le centre de f

3) Soit I le milieu de [NN'], on pose $I = t(M)$

a) Montrer que t est une translation dont précisera le vecteur.

b) Montrer que si N est distinct de ω alors (ωI) est perpendiculaire à (NN').

Exercice 34 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v). Soit $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

1) Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$

2) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = (1+i)e^{i\alpha}$ et $z_C = (1-i)e^{i\alpha}$.

a) Écrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

b) En déduire que le triangle OBC est rectangle isocèle en O.

c) Pour quelle valeur de α le quadrilatère OABC est-il un parallélogramme ?

3) À tout point M(z) on associe le point M'(z') tel que $z' = 2 + (z-2)^2$

On note C le cercle de centre K(2) et de rayon 2.

a) Déterminer z' pour $z = z_A$.

b) Soit M le point de C d'affixe $z = 2 + \sqrt{2} e^{i\alpha}$

Montrer que l'affixe de M' est $2 + \sqrt{2} e^{i2\alpha}$

Déterminer et construire, l'ensemble des points M' lorsque α varie dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

4) Soit N le point d'affixe $z_N = 2 + \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2}$

et N' le point associé à N.

a) Écrire $z_N - 2$ sous forme exponentielle; en déduire que N est un point de C.

b) Montrer que : $(\vec{u}, \overrightarrow{KN'}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

c) Placer N sur la figure puis construire le point N'.