

Exercice 1:

1) Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte quatre questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard à chacune des quatre questions.

La probabilité pour que ces quatre réponses soient toutes exactes est :

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3^4}$ c) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4$

2)

1) A et B sont deux événements d'un univers tels que:

$P(A)=0,4$; $P(B)=0,3$ et $P(A \cap B)=0,2$ Alors

a) $P(A \cap \bar{B})=0,1$ b) $P(A \cap \bar{B})=0,2$

c) $P(A \cap \bar{B})=0,4$

3)

Soit Ω un univers, p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et E et F deux événements tels

que $p(F)=\frac{1}{3}$ et $p(E/F)=\frac{1}{4}$.

$p(\bar{E} \cap F)$ est égal à

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{12}$

Exercice 2:

Une entreprise fabrique des appareils électroniques.

La probabilité pour qu'un appareil ainsi fabriqué

fonctionne parfaitement est $\frac{9}{10}$.

On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison on constate que:

- Quand un appareil est en parfait état de fonctionnement il est toujours accepté
- Quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement il peut être accepté avec une probabilité de $\frac{1}{11}$.

On note "T" : l'événement l'appareil est accepté à l'issue de test". Calculer $p(T)$ et $p(F/T)$.

F : L'appareil fonctionne parfaitement

Exercice 3 : (SC INF TN2009)

Une entreprise fabrique des calculatrices.

Un contrôle de qualité a montré que chaque calculatrice fabriquée par cette entreprise pouvait présenter deux types de défauts indépendants a et b. Une calculatrice est défectueuse si elle présente l'un des deux défauts.

On considère les deux événements suivants :

A : Une calculatrice fabriquée présente le défaut a.

B : Une calculatrice fabriquée présente le défaut b.

On suppose que $p(A)=0,01$ et $p(B)=0,03$

1) a) Calculer $p(A \cap B)$

b) Déduire que la probabilité pour qu'une calculatrice soit défectueuse est 0,0397

2) Une librairie passe une commande de 20 calculatrices.

Calculer la probabilité que deux calculatrices dans cette commande soient défectueuses.

3) La librairie exige que sur une commande d'un nombre n de calculatrices, la probabilité d'avoir au moins une calculatrice défectueuse reste inférieur à 50%. Déterminer le nombre maximum de calculatrices qu'elle peut commander.

Exercice 4 :

On considère trois urnes U_1 , U_2 et U_3 :

U_1 : Contient 2 boules noires et 3 rouges :

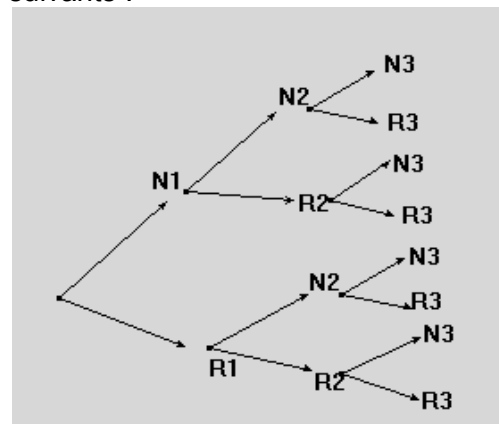
U_2 : Contient 1 boule noire et 4 rouges :

U_3 : Contient 3 boules noires et 4 rouges :

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2 , à les mettre dans U_3 , puis à tirer au hasard une boule de U_3 :

Pour i prenant les valeurs 1, 2, et 3, on désigne par N_i (respectivement R_i) l'événement : on tire une boule noire de l'urne U_i (respectivement on tire une boule rouge de l'urne U_i)

1) Reproduire et compléter l'arbre des probabilités suivants :



2) Calculer la probabilité des événements suivants :

$N_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$

b) En déduire la probabilité de $N_1 \cap N_3$

c) Calculer de façon analogue $p(R_1 \cap N_3)$

3) Déduire $p(N_3)$

4) Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants

5) Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge

Exercice 5:

Une urne contient trois pièces équilibrées, deux d'entre elles sont normales, elles possèdent une face "Face" et une face "Pile", la troisième est

truqué possède deux faces " Face ". On prend une pièce au hasard et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de cette pièce. On considère les événements: A "la pièce prise est normale", $\bar{A}$ "la pièce prise est truquée", B "obtenir pile au premier lancer et En "obtenir face pour les n premiers lancers.

1) Calculer $p(B)$.

2) Montrer que $p(E_n) = \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

3) a- Sachant que l'on a obtenu face pour les n premiers lancers quelle est la probabilité d'avoir pris la pièce truquée. Quelle est la limite de cette probabilité.

Exercice 6 :

1)a) Soit $p(B/A)=0.6$ et $p(A \cap B)=0.3$ calculer $p(A)$

b) Soit $p(B)=0.7$ et $p(A/B)=0.2$, calculer $p(A \cap B)$

2) Soit $p(A)=0.3$; $p(B)=0.7$ et $p(A \cup B)=0.8$

Calculer $p(A \cap B)$ puis $p(A/B)$ et $p(B/A)$

Exercice 7:

A et B sont deux événements tels que

$p(A)=0.4$ et $p(B)=0.3$

a) Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$ sachant que A et B sont indépendants

b) Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$ sachant que A et B sont incompatibles.

Exercice 8:

A et B sont deux événements tels que

$p(A)=0.4$ et $p(B)=0.3$ et $p(A \cup B)=0.58$

A et B sont-ils indépendants

Exercice 9

On veut tester l'efficacité d'un vaccin sur une population donnée. Un quart de la population a été vacciné. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a 1 vacciné sur 10 malades.

D'autre part, parmi les vaccinés, on compte 1/9 de malades.

On choisit au hasard une personne dans cette population.

On note M l'événement : la personne est malade et V l'événement : la personne est vaccinée.

1. Calculer la probabilité $P(M \cap V)$ pour que la personne soit malade et vaccinée.

En déduire que $P(M) = \frac{5}{18}$

2. Calculer $P(M \cap \bar{V})$. En déduire la probabilité conditionnelle $P(M/\bar{V})$.

Exercice 10

Une fourmi se déplace de façon aléatoire sur les arêtes de la pyramide SABCD de sommet S.

Depuis un sommet

quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin. On dit qu'elle fait un pas.

La fourmi se trouve initialement au point A.

1. Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit : • en A ? • en B ? • en C ? • en D ?

2. Pour tout entier naturel n strictement positif, on note S_n l'événement :

la fourmi se trouve au sommet S après n pas, et p_n la probabilité de cet événement : $p_n = P(S_n)$

(a) Que vaut p_1 ?

(b) En remarquant que $S_{n+1} = S_n \cap \bar{S}_n$, montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{3} (1 - p_n)$

3. On considère la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier n strictement positif par :

$p_1 = \frac{1}{3}$ et $p_{n+1} = \frac{1}{3} (1 - p_n)$

(a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n strictement positif, $p_n = \frac{1}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$

(b) Déterminer $\lim p_n$

Exercice 11:

Une grave maladie affecte le cheptel bovin d'un certain pays. On estime que 7% des bovins sont atteints.

On vient de mettre au point un test pour diagnostiquer la maladie, on a établi que:

* quand un animal est malade, le test est positif dans 87% des cas:

* quand un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 98% des cas.

On note F l'événement "être malade" et T l'événement "avoir un test positif".

1) Calculez la probabilité des trois événements suivants:

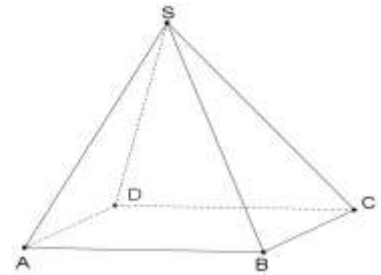
a) " F et T " b) " $\bar{F}$ et $\bar{T}$ " c) " F et $\bar{T}$ "

2) Déduisez-en la probabilité de T.

Quelle est la probabilité pour qu'un animal ayant un test négatif soit malade?

Exercice 13:

Un sac contient sept jetons indiscernables au toucher et répartis comme suit:



Quatre jetons blancs numérotés 1, 2, 2, 2.

Trois jetons noirs numérotés 1, 1, 2.

1°) On tire successivement et avec remise trois jetons du sac.

a- Calculer la probabilité d'avoir trois jetons blancs.

b- Calculer la probabilité pour que parmi les trois jetons tirés il y en ait deux seulement qui portent le numéro 1.

2°) On remet tous les jetons dans le sac et on tire de nouveau et successivement trois jetons de la manière suivante.

■ Si le jeton tiré porte le numéro 2, il est remis dans le sac.

■ Si le jeton tiré porte le numéro 1, il n'est pas remis dans le sac.

a- Calculer la probabilité d'avoir trois jetons blancs.

b- Calculer la probabilité pour que deux seulement des trois jetons portent le n°1 (TN91)

Exercice 15

Deux éleveurs E_1 et E_2 produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois:

• Pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.

• Pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois :

60 % au premier éleveur, 40 % au second.

On désigne par: S l'événement l'alevin a survécu jusqu'à l'âge de trois mois.

R l'événement l'alevin devient rouge.

G l'événement l'alevin devient gris.

1) Etablir l'arbre de probabilité

2) Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est à-dire à l'âge de deux mois.

a) Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.

b) Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

c) Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

Exercice 16:

Trois dés cubique sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Le troisième est spécial : trois de ses faces numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1

On tire simultanément deux dés et on les lance.

On note A l'événement : « les deux dés tirés sont normaux »

On note B l'événement : « les deux faces supérieures portent le numéro 6 »

1) Calculer $P(A)$.

2) a) Calculer que $P(B/A)$, puis $P(A \cap B)$

b) Montrer que $P(B) = \frac{7}{108}$

3) Calculer $P(A/B)$.

Exercice 17

Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations :

la destination A, la destination G et la destination M. 50 % des clients choisissent la destination A, 30 % des clients choisissent la destination G et 20 % des clients choisissent la destination M.

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction. Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90 % des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même que 80 % des clients ayant choisi la destination G.

On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis.

On note les événements :

A : « Le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A »

G : « Le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G »

M : « Le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M »

S : « le questionnaire est celui d'un client satisfait » :

$\overline{S}$: « le questionnaire est celui d'un client insatisfait »

1) Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité.

2) a) Calculer les probabilités $p(G \cap S)$ et $p(M \cap S)$.

b) L'enquête montre que 72 % des clients de l'agence sont satisfaits. calculer $p(A \cap S)$.

c) En déduire $p_A(S)$, probabilité de l'événement S sachant que l'événement A est réalisé.

3) Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait.

Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie. Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination G.

Exercice 18:

Un patineur participe à une compétition.

Deux de ses saut l'inquiètent.

Il ne réussit le premier saut que dans 95% des cas.

Comme il est émotif, s'il ne réussit pas ce premier saut, il rate le deuxième 3 fois sur 10; sinon, si tout va bien au premier saut, il réussit le deuxième dans 90% des cas. On notera $\bar{A}$ l'événement contraire d'un événement A.

Soit R_1 l'événement : "le patineur réussit le premier saut".

Soit R_2 l'événement : "le patineur réussit le deuxième saut".

1) a) Calculez la probabilité de l'événement R_1 .

b) Calculez la probabilité de l'événement R_2 sachant que R_1 est réalisé.

c) Calculez la probabilité de l'événement R_2 sachant que R_1 n'est pas réalisé.

2) Déterminez la probabilité de l'événement : "le patineur réussit les deux sauts".

3) a) Calculez la probabilité de l'événement R_2 .

b) Un spectateur, arrivé en retard, voit le patineur réussir le deuxième saut.

Calculez la probabilité qu'il ait aussi réussi le premier saut.

4. Manquer le premier saut fait perdre 0,1 point, manquer le deuxième saut fait perdre 0,2 point.

Le règlement prévoit que les pénalités s'ajoutent.

Soit X la variable aléatoire donnant le total des pénalités obtenues par ce patineur lors de la compétition.

a: Déterminez la loi de probabilité de X.

b: Calculer l'espérance mathématique de X.

Quelle interprétation peut-on en faire?

Exercice :19

Une urne contient neuf boules indiscernables au toucher dont quatre sont blanches numérotées 0,0,1,2 et cinq sont rouges numérotés 0,0,1,1,2.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1)a) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : Les deux boules tirées sont de même couleur.

B : les deux boules tirées portent le même numéro.

b) Sachant que les deux boules tirées sont de même couleur, quelle est la probabilité pour qu'elles portent le même numéro ?

2) Soit X l'aléa numérique prenant pour valeur le produit des numéros marqués sur les deux boules tirées. On désigne par E l'événement $X \neq 0$, calculer $p(E)$

On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant à chaque fois les deux boules tirées dans l'urne. Calculer la probabilité p pour que l'événement $X = 0$ soit réalisé au moins une fois.

Exercice 20: TN2001

Une urne contient 4 boules rouges et 6 noires.

1) On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de l'événement : la première boule tirée est noire et les deux autres boules tirées sont rouges.

2) On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de l'événement : la première boule tirée est noire et les deux autres boules tirées sont rouges

3) Soit E l'épreuve qui consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne ;

On désigne par A l'événement : Obtenir une boule noire et deux boules rouges.

a) Montrer que $p(A) = \frac{3}{10}$

b) On répète l'épreuve E cinq fois en remettant les trois boules dans l'urne après chaque épreuve et on désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de fois où l'événement A est réalisé. Déterminer la loi de X.

c) Calculer la probabilité de l'événement : $1 < X \leq 3$.

Exercice 21 :

Une urne contient cinq boules blanches, deux boules rouges et trois boules vertes indiscernables au toucher.

1°) On tire simultanément trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : Obtenir trois boules de même couleur.

B : Obtenir au moins une boule rouge.

2°) On effectue maintenant un tirage successif de deux boules de la manière suivante :

On tire une première boule :

* Si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on effectue le deuxième tirage.

* Si elle n'est pas blanche, on la garde à l'extérieur de l'urne et on effectue le 2^{ème} tirage.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout résultat, associe le nombre de boules rouges.

Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.

Exercice 22:

Une urne contient deux boules blanches et 2 boules rouges. On tire successivement et sans remise les quatre boules.

Soit X l'aléa numérique qui désigne le rang de la deuxième boule rouge tirée.

1°) Déterminer la loi de X .

2°) Calculer l'espérance et l'écart type de X .

3°) Définir la fonction de répartition de X .

4°) On répète l'épreuve précédent quatre fois de suite et on désigne par Y l'aléa numérique qui désigne le nombre de fois d'avoir

($X = 3$). Déterminer la loi de Y .

Exercice 23:

Un sac contient sept jetons indiscernables au toucher et répartis comme suit:

Quatre jetons blancs numérotés 1, 2, 2, 2. Trois jetons rouges numérotés 1, 1, 2.

1°) On tire au hasard et simultanément 3 jetons.

Calculer la probabilité d'avoir au moins un jeton rouge.

Calculer la probabilité d'avoir des jetons portant des numéros distincts.

Calculer la probabilité d'avoir des jetons portant des numéros distincts sachant qu'ils sont blancs.

2°) On tire au hasard et successivement et avec remise 3 jetons. Soit X l'aléa numérique associant le nombre de jeton rouges obtenus.

a- Calculer la loi de X et l'écart type de X .

b - Calculer $p(1 \leq X < 3)$.

3°) On effectue n tirages successives avec remise de n jetons, soit p_n la probabilité d'avoir au moins un jeton rouge. Déterminer la plus petite valeur de n pour que l'on ait $p_n \geq 0.84$.

Exercice 24:

Un sac contient 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement et avec remise deux boules.

1°) Quelle est la probabilité d'obtenir une seule fois une boule noire.

2°) $n \in \mathbb{N}^*$; on tire successivement et avec remise une boule n fois (les tirages successifs sont numérotés de 1 à n).

Soit X l'aléa numérique définie par :

X prend 0 si on tire que de boules blanches

X prend x_i le rang du 1^{er} tirage donnant une noire.

a- Calculer $p(X=0)$,

b - Calculer $p_k = p(X = k)$, $k \in]0, n]$

c- Calculer $S_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$. Et donner $\lim S_n$.

Exercice 25:

Une urne contient 12 boules dont n sont noires et les autres blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1°) On suppose $n = 5$ et on tire, sans remise et successivement deux boules de l'urne.

a- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

A: "La première boule tirée est noire et la seconde est blanche".

B: "Les deux boules tirées sont blanches".

b- On répète l'épreuve six fois en remettant, à l'issue de chaque épreuve, les deux boules tirées dans l'urne. On considère ensuite la variable aléatoire X prenant pour valeur le nombre de réalisations de l'événement A.

Déterminer la loi de X ainsi que son espérance mathématiques $E(X)$.

2°) dans cette question, on suppose $n \geq 2$.

a- Exprimer en fonction de n , la probabilité p_n de A.

b- Déterminer n pour que p_n soit maximale.

Exercice 27:

Une urne contient cinq boules blanches, deux boules rouges et trois boules vertes indiscernables au toucher.

1°) On tire simultanément trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

A: Obtenir trois boules de même couleur.

B: Obtenir au moins une boule rouge.

2°) On effectue maintenant un tirage successif de deux boules de la manière suivante:

On tire une première boule:

■ Si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on effectue le deuxième tirage.

■ Si elle n'est pas blanche, on la garde à l'extérieur de l'urne et on effectue le 2^{ème} tirage.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout résultat, associe le nombre de boules rouges.

Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.

Exercice 28:

Une boîte B1 contient 3 jetons numérotés: 0, 0, 2,

Une boîte B2 contient 4 jetons numérotés: 1, 1, 3, 4.

1°) On tire au hasard un jeton de chaque boîte et on désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur le produit des nombres inscrits sur les deux jetons tirés. Déterminer la loi de X .

2°) On effectue trois fois le tirage décrit à la question précédente, chaque jeton étant remis dans sa boîte après chaque tirage.

Quelle est la probabilité d'obtenir:

a- Exactement deux fois un produit ≥ 4

b- Au plus une fois un produit supérieur à quatre?

3°) Une épreuve consiste à faire des tirages d'un jeton de la boîte B1, en remettant chaque fois le jeton tiré. On désigne par p_n la probabilité de l'événement: "Obtenir le jeton 2 au nième tirage pour la première fois.

a- Calculer p_1, p_2, p_3 puis p_n .

b- Calculer $S_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Exercice 29:

Une urne contient une boule blanche, une boule rouge et trois boules noires toutes indiscernables au touches.

1) On tire une boule. Calculer la probabilité p_1 pour qu'il reste dans l'urne exactement deux couleurs.

2) On tire successivement et sans remise, deux boules ; Calculer la probabilité p_2 pour qu'il reste dans l'urne exactement deux couleurs.

3) On tire simultanément deux boules de l'urne. On désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de couleurs qui restent dans l'urne ;

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer $E(X)$

TN 2002

Exercice 30:

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher. Deux boules sont blanches et portent respectivement les nombres 1 et 2, les deux autres boules sont noires et portent respectivement les nombres 1 et 2. Une épreuve consiste à tirer successivement deux boules de la manière suivante: On tire une boule

■ Si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on tire une deuxième boule.

■ Si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne et on tire une deuxième boule.

1°) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque épreuve, associe le nombre de fois où l'on obtient une boule blanche.

Donner la loi de probabilité de X.

Calculer son espérance mathématiques.

2°) Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque épreuve, associe le produit des nombres marqués sur les deux boules obtenues.

Donner la loi de Y.

TN 96.

Exercice 31:

On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3 .

U_1 contient 5 boules noires et 4 boules blanches

U_2 contient 3 boules noires et 2 boules blanches

U_3 contient 2 boules noires et une boule blanche.

On tire successivement et sans remise deux boules de U_1 :

Si les deux boules tirées sont du même couleur alors

on tire une troisième de U_2 sinon on tire une troisième boule de U_3 .

1°) Calculer la probabilité des événements suivantes:

A: Obtenir une boule blanche de U_2 .

B: Obtenir une boule noire de U_3

2°) Soit la variable aléatoire X qui à chaque épreuve associe le nombre de boule blanche tirées. Donner la loi de X.

3°) Soit Y l'aléa numérique qui à chaque épreuve associe le numéro du tirage qui a fourni une boule blanche pour la première fois et prend la valeur 0 si on obtient pas des boules blanches.

Donner la loi de Y.

Exercice 32:

Dans chacun des cas suivants, préciser si la fonction proposée est ou n'est pas une densité de probabilité

a) f_1 est définie sur $[0,1]$ par $f_1(t)=t^2$

b) f_2 est définie sur $[0,1]$ par $f_2(t)=4t^3$.

c) f_3 est définie sur $[1,2]$ par $f_3(t)=4t^3$

d) f_4 est définie sur $[-1,0]$ par $f_4(t)=4t^3$

e) f_5 est définie sur $[2,+\infty[$ par $f_5(t)=\frac{2}{t^2}$

Exercice :33(SCTN 2009):

La durée de vie d'une machine (exprimé en année) suit une loi exponentielle de paramètre 0.2.

1) Calculer la probabilité qu'une machine ait une durée de vie comprise entre 2 et 4 ans.

2) Calculer la probabilité pour que la durée de vie d'une machine dépasse 2 ans

3) On considère un lot de 4 machines fonctionnant de manière indépendante.

Déterminer la probabilité que la durée de vie d'au moins une machine parmi les quatre dépasse 2 ans

Exercice34 :

1) Soit $I = [1, 10]$ et f_λ la fonction définie sur I par $f_\lambda(t)=\lambda t^{-2}$.

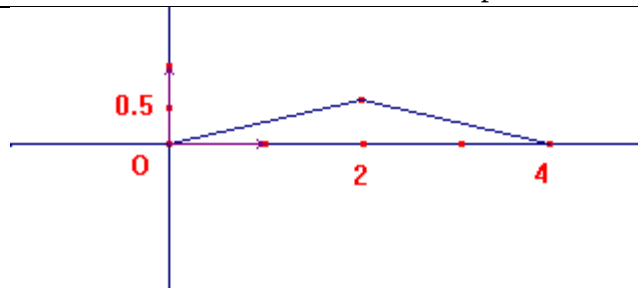
Déterminer le réel λ pour lequel f_λ est une densité de probabilité.

2) Même question que 1 avec $I = [1, +\infty[$

Exercice35 :

La fonction f représentée ci-après est définie sur $[0, 4]$, Justifier que f est une densité de probabilité.

Calculer $P([1 ;3])$



Exercice 36:

On choisit un nombre au hasard dans $[0, 1]$

Que représente la probabilité conditionnelle

$P_{[0.25; 0.5]}([0.4; 0.45])$? Calculer cette probabilité

2) Sachant qu'il est compris entre 0.1 et 0.2, quelle est la probabilité que le nombre choisi soit supérieur à 0.17 ?

Exercice 38:

Exercice 40 QCM :

Pour chaque question une seule de 4 propositions est exacte.

1) Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = m + 1$, $m \in \mathbb{R}$

f est une densité de probabilité sur $[0, 1]$ lorsque

- a) $m = -1$, b) $m = 0.5$,
c) $m = e^{0.5}$, d) $m = e^{-1}$

2) La durée de vie d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0.2

La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans

est : a) $1 - \frac{1}{e}$; b) $\frac{1}{e}$; c) $\frac{1}{5e}$; d) $\frac{1}{0.2}(e-1)$

Exercice 41:

Soit $f(t) = ke^{-t}$ sur $[0; +\infty[$

Déterminer le réel k de sorte que f soit une densité de probabilité.

Si P désigne la probabilité associée à la densité f , déterminer le réel m tel que $P([0; m]) = P([m; +\infty[)$

Exercice 42:

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi de durée de vie sans vieillissement (ou encore loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$)

1) Sachant que $P(X > 10) = 0.286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0.125

On pose $\lambda = 0.125$ dans la suite de l'exercice.

2) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie ≤ 6 mois

1) a) Démontrer que la fonction $f(t) = 4t^3$ est la densité de probabilité définie sur $[0; 1]$

b) Calculer $P([0.25; 0.75])$

2) Soit P' une loi de probabilité sur $[1; 10]$, de densité $g(t) = kt^{-2}$, où $k \in \mathbb{R}^*$

a) Déterminer la valeur du réel k , puis étudier et représenter graphiquement la fonction g sur $[1, 10]$

b) Calculer les probabilités $P'([1; 5])$ et $P'([5; 10])$ représenter graphiquement ces quantités sur la figure réalisée précédemment

Comparer les amplitudes et les probabilités des intervalles $[1; 5]$ et $[5; 10]$

Exercice 39:

On appelle P la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$, associée à la densité f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = e^{-t}$

a) Calculer la probabilité conditionnelle $P_{[2; +\infty[}([2; 4])$

b) Soit $k \in \mathbb{R}^*$ Calculer $P_{[k; +\infty[}([k; k+2])$.

Ce résultat dépend-il de k

3) Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie ≥ 10 ans.

4) On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie ≥ 10 ans.

5) Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieur à 0.999

Exercice 43:

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 0.25 au premier fournisseur et 0.75 au second. La proportion de composants défectueux est de 0.03 chez le premier fournisseur et de 0.02 chez le second. On note :

D : l'événement : Le composant est défectueux

F_1 : l'événement : Le composant provient du premier fournisseur

F_2 : Le composant provient du premier fournisseur

1) a) Etablir un arbre pondéré.

b) Calculer $p(D \cap F_1)$, puis déduire que $p(D) = 0.0225$

c) Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

2) Le responsable commande 20 composants.

Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

3) La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

a) Sachant que $P(X > 5) = 0.325$, déterminer λ .

On prendra $\lambda = 0.225$ dans la suite.

b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

c) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

Exercice 44:

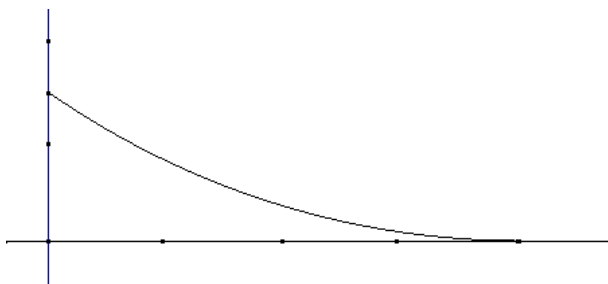
A) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ ,

on rappelle que $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$

La courbe ci-dessous représente la fonction densité associée.

1) interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leq 1)$

2) Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ .



B) On pose $\lambda = 1.5$ dans la suite :

1) Calculer $P(X \leq 1)$ et $P(X \geq 2)$

2) Déduire $P(1 \leq X \leq 2)$

4) Calculer $F(x) = \int_0^x 1.5 te^{-1.5t} dt$, donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

On obtient ainsi l'espérance mathématique de X .

C) Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixième de millimètres, entre la diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.

On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1.5$

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté.

Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 0.8 des cas.

Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1) On prélève au hasard un cylindre dans la production.

a) Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égal à 0.915

b) Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification.

2) On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.

a) Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?

b) Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé.

Exercice 45:

La durée de vie d'un robot, exprimé en années, jusqu'à ce survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Ainsi la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

1) Déterminer λ pour que $P(X > 6) = 0.3$

Pour la suite on prendra $\lambda = 0.2$

2) A quel instant t , à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0.5 ?

3) M que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours de deux premières années est $e^{-0.4}$

4) Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours de deux premières années, quelle est à 10^{-2} près la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans.

5) On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.

Déterminer la probabilité que dans ce lot il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Exercice 47 :

On veut tester l'efficacité d'un vaccin sur une population donnée. Un quart de la population a été vacciné. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a 1 vacciné sur 10 malades.

D'autre part, parmi les vaccinés, on compte $\frac{1}{9}$ de malades.

On choisit au hasard une personne dans cette population.

On note M l'événement : La personne est malade et V l'événement : la personne est vaccinée.

1a) Calculer la probabilité $P(M \cap V)$ pour que la personne soit malade et vaccinée.

b) En déduire que $P(M) = \frac{5}{18}$

2a) Calculer $P(M \cap \bar{V})$.

b) En déduire la probabilité conditionnelle $P_{\bar{V}}(M)$.

Exercice 48:

Les résultats seront donnés avec une précision de 2 chiffres après la virgule.

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ .

1) a) Déterminer une expression exacte de λ sachant que $P(T \leq 10) = 0,7$

On prendra pour la suite de l'exercice, la valeur 0,12 comme valeur approchée de λ .

b) Déterminer la probabilité pour que la durée d'attente soit comprise entre 10 minutes et 15 minutes.

c) Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes.

2) On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement 6 caisses sont ouvertes.

On désigne par Y la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.

a) Donner la de probabilité de Y .

b) Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10 minutes. Déterminer la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

Exercice 50

Le service après-vente d'une entreprise, vendant une certaine marque de calculatrices, s'est aperçu que ces dernières pourraient présenter deux types de défaut, l'un lié au clavier, l'autre à l'affichage. Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante :

La probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0,04. En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est 0,03.

Alors qu'en l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est de 0,94.

On note C l'évènement : « la calculatrice présente un défaut de clavier »,

A l'évènement « la calculatrice présente un défaut d'affichage ».

Dans cet exercice, les résultats du calcul des probabilités seront arrondis au dix millième près.

1°) a) Déduire des énoncés de l'exercice les probabilités suivantes : $p(A|C)$, $p(\bar{A} | \bar{C})$ et $p(C)$.

b) Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

2°) On choisit une calculatrice de cette marque au hasard.

a) Calculer la probabilité que la calculatrice présente les deux défauts.

b) Calculer la probabilité que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.

c) En déduire $p(A)$.

d) Montrer que la probabilité de l'évènement « la calculatrice ne présente aucun défaut » est 0,9024.

3°) Le prix de vente d'une calculatrice est fixé à 35 dinars et le service après-vente s'engage à prendre en charge les réparations en cas de présence d'un défaut:

- Si la calculatrice présente un défaut de clavier, le coût de la réparation est de 3 dinars.
- Si la calculatrice présente un défaut d'affichage, le coût de la réparation est de 5 dinars.
- Si la calculatrice présente les deux défauts alors le client récupère ses 35^D et garde la calculatrice.

Soit X la variable aléatoire égale au prix de vente réel d'une calculatrice (après réparation si c'est nécessaire)

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer alors le prix de vente d'une calculatrice que peut espérer l'entreprise.

4°) On suppose que la durée de vie (exprimée en années) d'une calculatrice de cette marque est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,255$.

a) Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une calculatrice dépasse 2 ans ?

b) Calculer la durée de vie moyenne d'une calculatrice de ce type.

c) Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une calculatrice dépasse 5 ans sachant qu'elle est déjà fonctionnelle depuis plus de 3 ans ?