

### Exercice 1

#### Répondre par Vrai ou Faux

I) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère

$$l_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

- 1) a) La suite  $(l_n)$  n'est monotone  
b) La suite  $(l_n)$  est décroissante
- 2) a)  $l_1 = 1$                       b)  $l_{n+1} = e - (n+1)l_n$
- 3) a) Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $l_n \geq 0$   
b) Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $l_n \leq \frac{e}{n+1}$
- 4) a)  $(l_n)$  est convergente              b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = 1$

II) Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t - 1} dt$ .

- a)  $f$  est définie en 1
- b)  $f$  est définie en tout réel  $x \in [0, 1]$
- c)  $f$  est définie en tout réel  $x \in [1, 2]$

### Exercice 2:

Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \ln x}{x - 2 \ln x}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 + \ln x}{x - 2 \ln x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln \frac{x}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x+3}{x^2 + 1} \ln x \right];$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^4}{\sqrt[5]{x}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln(x+3)}{\ln x} \right]; \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \sqrt{1 + \ln^2 x});$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \ln^3 \sqrt{x}); \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{x \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2x \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[5]{x} (\ln x)^4; \lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x \ln x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + 2012x)}{x}; \lim_{x \rightarrow e} \frac{-1 + \ln x}{x - e}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -(\ln x)^2 - 2 \ln x + x \ln x; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2};$$

### Exercice 3:

Calculer les intégrales suivantes :

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{x+1} dx; A = \int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx; H = \int_1^e t \ln t dt$$

$$D = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx; I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} \ln x dx;$$

### Exercice 4 :

$n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ;  $f_n(x) = x^n \ln x$ ,  $x > 0$  et  $f_n(0) = 0$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f_n$  en 0
- 2) Etudier les variations de  $f_n$ .
- 3) a/ Démontrer que  $f_n(x) = 1$  admet une solution unique  $x_n$  et que  $1 < x_n$ .  
b/ Démontrer que la suite  $(x_n)$  est décroissante.

c/ On pose  $t_n = (x_n)^n$ ; montrer que  $t_n \ln t_n = n$ .

d/ Montrer que  $\forall x > 0$ ;  $x-1 \leq x \ln x$

puis que  $1 \leq t_n \leq n+1$ ,

en déduire un encadrement de  $x_n$

e/ Déduire que  $(x_n)$  est convergente vers une limite que l'on précisera.

### Exercice 5:

1°) Mque  $\forall x > 0$ , on a :  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

2°) En déduire la limite de la suite  $u$  de terme

$$\text{général : } u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

### Exercice 6:

Soit  $F$  la primitive de  $f_1(x) = \frac{\ln x}{x}$  qui s'annule en 1.

1) Expliciter  $F(x)$

2) Montrer que pour tout  $x \geq e$ , on a :

$$\frac{\ln(x+1)}{x+1} \leq F(x+1) - F(x) \leq \frac{\ln x}{x}$$

3) Déduire la limite de la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}^*$

$$\text{par : } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$$

4) On pose  $v_n$  la valeur maximale de  $f_n$

a) Vérifier que, pour tout  $x \geq 1$ ,  $f_{n+1}(x) = \frac{\ln(x)}{n+1} f_n(x)$

b) Montrer que  $(v_n)$  est une suite décroissante.

c) Déduire que  $(v_n)$  est convergente.

### Exercice 7:

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x + x \ln x \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0+

b) Etudier  $f$  puis construire sa courbe  $C$ .

2) a) Mque  $\forall x \geq 0$ ;  $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$

b) En déduire que  $\forall k \leq n$ ,  $\frac{k^2}{n^2 + n^3} \leq \ln(1 + \frac{k^2}{n^3}) \leq \frac{k^2}{n^3}$

c) Déduire la limite de la suite  $u$  définie par :

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left( \frac{n^3 + k^2}{n^3} \right)$$

### Exercice 8:

1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par  $g(x) = 1 - x + x \ln x$

a) Etudier les variations de  $g$ .

b) En déduire le signe de  $g(x)$  pour  $x \geq 1$

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} \text{ si } x > 1 \text{ et } f(1) = 1$$

Montrer que f est continue en 1

3a) Montrer que  $\forall t \geq 1$  on a :  $t - 1 - (t - 1)^2 \leq 1 - \frac{1}{t} \leq t - 1$

b) En déduire que  $\forall x \geq 1$  on a :

$$\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} \leq x - 1 - \ln x \leq \frac{(x-1)^2}{2}$$

c) Déduire alors  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$

d) En déduire que f est dérivable en 1+ et calculer f'(1)

4a) Dresser le tableau de variation de f Tracer C de f

### Exercice 9:

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$ ,

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{-1+x}; & x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = 0; f(1) = 1 \end{cases}$$

1a) Montrer que f est continue sur  $\mathbb{R}^+$

b) Etudier la dérivabilité de f en 0+

2) Soit  $\varphi(t) = \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)^2} (t-1)^2 - t \ln t - 1 + t, x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

a) Montrer qu'il existe un réel c compris entre 1 et x tel que  $\varphi'(c) = 0$

b) Déduire  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)^2}$

b) Prouver que f est dérivable en 1 puis donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

3a) Etudier les variations de la fonction g définie par  $g(x) = 1 - x^2 + 2x \ln x$  puis déduire le signe de g(x).

b) Etudier alors la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T).

4) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (C) de f.

### Exercice 10 (7 points)

Soit par  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt, x > 0$

1° a) Etudier le sens de variations de f.

b) En déduire le signe de f(x)

2° a) Soit x un réel strictement positif,

calculer  $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ .

b) En déduire que pour tout  $x \geq 1$ ,

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \ln x \right) \leq f(x) \leq 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \ln x$$

c) Prouver alors que f admet en  $+\infty$  une limite finie l

et que  $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$

3° a) Montrer que, pour tout réel  $x > 0$ ,  $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ .

b) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

4° Soit g la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par

$$\begin{cases} g(x) = f(x), & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

a) Etudier les variations de la fonction h définie sur

$$[0, 1] \text{ par } h(x) = g(x) - \frac{1}{2} (x \ln x - x)$$

b) Montrer que pour tout réel x de  $]0, 1]$ ,

$$g(x) - 1 \leq \frac{1}{2} (x \ln x - x).$$

c) Etudier alors la dérivabilité de g à droite en 0.

Interpréter le résultat graphiquement.

d) Donner l'allure de la courbe de g.

On prendra  $l \approx 0.86$

### Exercice 11:

Soit la famille des fonctions  $f_n, n \geq 2$  définie sur

$$[1, +\infty[ \text{ par : } f_n(x) = \int_{\ln x}^{nx} \frac{dt}{t}$$

On désigne par  $C_n$  la courbe de  $f_n$ .

1°) n et m étant deux entiers tels que  $2 \leq n < m$ , étudier la position relative de la courbe  $C_n$  et  $C_m$ .

2°) a – Démontrer que  $f_n$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et calculer  $f'_n(x), x > 1$

b – En déduire que  $(C_n)$  admet une unique tangente parallèle à l'axe des abscisses en un point

d'abscisse  $u_n = \frac{1}{n^{n-1}}$  et d'ordonnée  $v_n = f_n(u_n)$

3°) a – Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

b – Montre que  $\forall t > 1, \ln(t) < t - 1$

c) Montrer que  $\forall n \geq 2$  on a :  $\frac{(n+1)^n}{n^n} < e$

et  $\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} < 1$

En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$

4°) a – En utilisant A / 3°) a / ,

montrer que  $\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = +\infty$

b – En déduire la limite de  $v_n$

### Exercice 12:

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie

par :  $f(x) = \ln \frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}$

1/a) Déterminer le domaine de f.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0+.

2/a) Dresser le tableau de variation de f.

b- Tracer sa courbe C dans un plan muni d'un repère orthonormé R(o,i,j)  
II/ 1) Montrer que  $\forall x \geq 0$ , on a :  $\ln(1+x) \leq f(x) \leq \ln(2+x)$

2) Soit  $\varphi(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ , définie sur  $\mathbb{R}^+$

Montrer que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]1,4[$

3) Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(2u_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$   
a- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_n \in [1,2]$

b- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \frac{1}{2}\alpha| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} |u_n - \frac{1}{2}\alpha|$

Montrer que la suite  $u$  est convergente et donner sa limite.

### Exercice 13:

I/ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$\begin{cases} f(x) = x(-1 + \ln(x)) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0.

2) Etudier les variations de  $f$  et construire sa courbe représentative C dans un repère ortho normal

3) Soit  $\varphi$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0, 1]$ .

Montrer que  $\varphi$  réalise une bijection de  $[0, 1]$  dans un intervalle  $J$  à préciser.

a- Déterminer le domaine de dérivabilité de  $\varphi^{-1}$ .

b- Construire les courbes C de  $\varphi$  et C' de  $\varphi^{-1}$  dans un repère orthonormé  $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

II/ Soit  $u$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = e \\ u_n > 0 \text{ et } u_{n-1} f'(u_n) = f(u_{n-1}), n \geq 1 \end{cases}$$

1) a) Montrer que  $u$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{e}$ .

b- Exprimer alors  $u_n$  en fonction de  $n$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M_k$  et  $M_{k+1}$  sont les points de C d'abscisses respectives  $u_k$  et  $u_{k+1}$ .

Soit  $S_k$  l'aire du triangle  $OM_k M_{k+1}$ .

a- Prouver que  $S_k = \frac{1}{2} [u_{k+1} f(u_k) - u_k f(u_{k+1})]$

b- Calculer  $S_k$  en fonction de  $k$ .

c- Soit  $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k$ , Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

### Exercice 14 :

I/ Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \ln [x + \sqrt{x^2 - 1}]$$

1) Déterminer le domaine D de  $f$ .

2) Etudier les variations de  $f$  et construire sa courbe

représentative C dans un r.o.n  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) a- Montrer que  $f$  réalise une bijection de D dans un intervalle  $J$  à préciser.

b- Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f^{-1}$ .

c- Construire la courbe C' de  $f^{-1}$  dans le même repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

Vérifier que  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ .

II/ Soit  $u$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ 1 + u_{n+1} = 2u_n^2, n \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que pour tout  $n$ ,  $u_n > 1$ .

2) On pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $V_n = f(u_n)$

a- Vérifier que la suite  $(V_n)$  est bien définie et déterminer  $v_0$ .

b) Montrer que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique puis déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$  et  $v_0$ .

c) Montrer alors que  $u_n = \frac{1}{2} \left[ (2 + \sqrt{3})^{2^n} + (2 - \sqrt{3})^{2^n} \right]$

### Exercice 15:

A) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{*+}$  par :  $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x^2}$

1) Etudier les variations de  $f$ .

2) Tracer la courbe C de  $f$  dans un repère orthonormé.

3) a) Calculer  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

b) Calculer l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équations :

$x=1$ ,  $x=e$  et  $y=0$ .

B) Soit  $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$  ;  $x > 0$

1) Soit  $x \in [1, +\infty[$

a) Montrer que pour tout  $t \in [x, 2x]$ ,  $0 \leq f(t) \leq \frac{(\ln 2x)^2}{t^2}$

b) En déduire que  $0 \leq F(x) \leq \frac{(\ln 2x)^2}{2x}$

c) En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

2) Soit  $x \in ]0, \frac{1}{2}]$

a) Montrer que  $\frac{(\ln 2x)^2}{2x} \leq F(x)$

b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$

3a) Montrer que F est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que

$$F'(x) = \frac{(\ln(2x))^2 - 2(\ln x)^2}{2x^2}$$

b) Dresser le tableau de variations de F.

### Exercice 16:

I. Soit la fonction définie sur

$$\mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \text{ par : } \begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur  $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Etudier la dérivabilité en 0.

2. Etudier les variations de f.

3. Construire la courbe (C) représentant la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

On fera figurer la demi-tangente en l'origine du repère.

II. Dans cette partie, on étudie la fonction H définie par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer. On

donne  $H(x) = \int_{\sqrt{x}}^x f(t) dt$  pour tout x de  $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ .

1. a. Justifier l'existence de H(x) pour tout x de  $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ .

b. Etudier le signe de H(x) sur  $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ .

2. Déterminer  $H'(x)$  pour tout réel x de  $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

3. Montrer qu'il existe un réel M tel que pour tout x de  $[0, \frac{1}{2}]$ , on ait  $|f(x)| \leq M$ . En déduire la limite de H à droite en zéro.

4. a) On donne  $K(x) = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{t \ln(t)} dt$

Montrer que K est une fonction constante.

b) Montrer que la fonction  $g(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$  admet un prolongement par continuité en 1.

En déduire la limite en 1 de la fonction (H-K) puis de celle de H.

c) Montrer que pour tout x > 0 et x ≠ 1 on a :

$$\frac{x - \sqrt{x}}{\ln x} \leq H(x) \leq \frac{2(x - \sqrt{x})}{\ln x}$$

En déduire la limite en  $+\infty$  de H puis la limite en  $+\infty$  de la fonction  $x \rightarrow \frac{H(x)}{x}$

Interpréter graphiquement ces résultats.

d) Dresser le tableau de variations de H.

### Exercice 17

A) Soit g la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$g(x) = x + (x - 2) \ln x.$$

1)a- Montrer que pour tout réel x > 0,

$$g'(x) = \frac{2(x-1)}{x} + \ln x.$$

b- En déduire que pour tout réel x > 1,  $g'(x) > 0$ .

2)a- Dresser le tableau de variation de g.

b- En déduire que pour tout réel x > 0,  $g(x) \geq 1$ .

B) Soit f la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2.$$

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé (O,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ) (unité 2 cm)

1)a- Montrer que pour tout réel x > 0,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ .

b- Dresser le tableau de variation de f.

2)a- Écrire une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.

b- Montrer que pour tout x > 0,  $x - 1 - \ln x \geq 0$ .

c- Étudier alors la position de C par rapport à T.

3)a- Montrer que f réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ .

On désigne par C' la courbe de la réciproque de f.

b- Tracer, dans le même repère, les courbes C et C'.

### Exercice 18:

Soit f la fonction définie sur  $I = \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

1°) Montrer que f est continue en 0.

2°) Soit a un réel non nul de l'intervalle I.

On considère la fonction  $g_a$  définie sur I par :

$$g_a(x) = [\ln(2a+1) - 2a] \cdot x^2 - [\ln(2x+1) - 2x] \cdot a^2$$

a) Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, qu'il existe un réel b compris entre 0 et a tel que

$$\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}.$$

b) En déduire que f est dérivable en 0 et que

$$f'(0) = -2$$

3°) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur I par :

$$\varphi(x) = 2x - (1+2x) \ln(1+2x).$$

a) Étudier les variations de  $\varphi$ .

b) En déduire que pour tout réel non nul x de I,

$$\varphi(x) < 0.$$

4°) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Mque f réalise une bijection de I sur  $]0, +\infty[$ .

c) Tracer dans un repère orthonormé (O,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ) les

courbes C et C' respectives de f et de sa réciproque  $f^{-1}$

### Exercice 19

1) On considère la fonction  $f_1$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$ .

a) Déterminer la limite de  $f_1$  en  $+\infty$ .

b) Déterminer la dérivée de  $f_1$ .

c) Dresser le tableau de variations de  $f_1$ .

2) Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère la fonction  $f_n$ , définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2 + 1)}{n}$$

a) Déterminer la limite de  $f_n$  en  $+\infty$ .

b) Démontrer que la fonction  $f_n$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

c) Démontrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $a_n$  sur  $[0; +\infty[$ .

d) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 < a_n < 1$ .

3) Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $f_n(a_{n+1}) > 0$ .

4) Étude de la suite  $(a_n)$

a) Montrer que la suite  $(a_n)$  est croissante.

b) En déduire qu'elle est convergente.

c) Utiliser l'expression  $a_n = 1 - \frac{\ln(1 + a_n)}{2n}$  pour déterminer la limite de cette suite.

### Exercice 20 ( 6 points )

1) Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2})$$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère

orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Montrer que le point  $I(1, 0)$  est un centre de symétrie de la courbe  $(C)$ .

b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}.$$

2) Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $(u_n)$  la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}} dt \quad \text{et}$$

$$u_n = \int_0^2 \frac{(t-1)^{2n}}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}} dt, \text{ si } n > 0.$$

$$\text{Soit } I = \int_0^2 \sqrt{t^2 - 2t + 2} dt.$$

a) Calculer  $u_0$ .

b) Montrer que  $u_0 + u_1 = I$ .

c) Montrer que  $u_1 + I = 2\sqrt{2}$ .

d) En déduire  $u_1$ .

e) Montrer que pour tout entier naturel non

$$\text{nul } n, \frac{\sqrt{2}}{2n+1} \leq u_n \leq \frac{2}{2n+1}.$$

f) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### Exercice 21 :

I/ On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = -2\ln x - 2x + 1$

1) Dresser le tableau de variation de  $g$

2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ , vérifier que  $\alpha \in ]0.5, 1[$

3) En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$

II/ On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x + \ln x}{x^2}$

On donne ci-dessous la représentation graphique  $C$  de  $f$  dans un repère orthonormé

$T$  est la tangente à  $C$  au point d'abscisse 1

1) a) Par une lecture graphique, déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$$

a) Donner un encadrement de  $f$  sur  $[1, 3]$

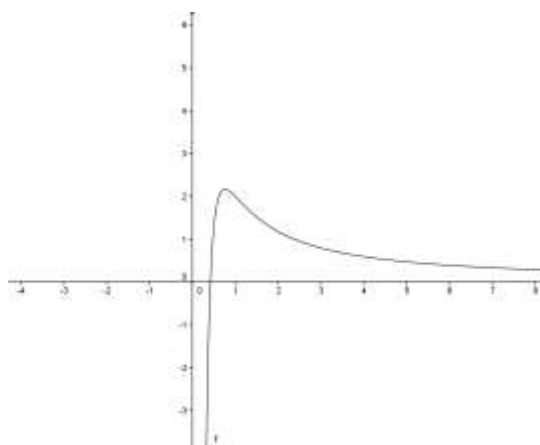
2) Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

3) Dresser le tableau de variation de  $f$

4) Soit  $\int_{2^n}^{2^{n+1}} \left( \frac{\ln t}{t^2} \right) dt$  et  $A_n = \int_{2^n}^{2^{n+1}} f(t) dt$

a) Montrer à l'aide d'une intégration par

$$\text{parties que : } I_n = \frac{\ln 2^{n+1} + 1}{2^{n+1}}$$



b) Montrer que  $A_n = I_n + 2 \ln 2$

c) Donner une interprétation géométrique de  $A_0$

d) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$