

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\pi(x+1)}{2x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+\sin x}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{1-x},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sin x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2\sin x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$$

Exercice :2

$b \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie et dérivable sur $[b, +\infty[$, telle que $\forall x \geq b$, on a : $f'(x) \geq 2$.

1) Mque $\forall x \geq b$, $f(x) \geq 2(x-b) + f(b)$

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3) Mque l'on peut déterminer des réels m et M que l'on précisera, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} : m \leq \frac{1}{2-\sin x} \leq M$$

En, déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2-\sin x}$

Exercice 3:

Soit $f(x) = \frac{3x+\sin x}{x-1}$ sur $[2, +\infty[$

a) Mque $|f(x)-3| \leq \frac{4}{x-1}$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$

Exercice 4:

Vrai ou Faux

La fonction f est donnée par son tableau de variation et tel que $f(0)=2$ et $f(2)=0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	0 ↗	3 ↘	$-\infty$

g est la fonction définie par : $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$ alors :

a) $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}^-$;

b) $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$;

c) $f \circ g$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) = -1$;

f) $g \circ f$ est prolongeable par continuité en 2

Exercice 5:

Soit $f(x) = x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1) Dque f est une fonction impaire.

On appelle g la restriction de f sur $I =]0, +\infty[$

2) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$

3) Dque g est croissante sur I

4) On pose $h(x) = g(x) - x$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x))$ et interpréter

graphiquement le résultat.

5) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{x}$

6) Construire C_g et C_f .

Exercice 6:

1) Montrer que l'équation (E) $x^7 - x^2 + 1 = 0$, a une seule solution sur $I = [-2, 0]$

2) M que : $f(x) = x^3 + 2x + 1$ s'annule dans $\mathbb{R}$.

3) Mque l'équation $2\cos x = x-1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

4) Mque l'équation $\sqrt{x} = \frac{5}{x-2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7: VRAI – FAUX

Soit f une fonction d'ensemble de définition $[a, b]$ où a et b sont deux réels tels que

$f(a)=2$ et $f(b)=-1$

1) L'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution dans $[a, b]$

2) Si f est continue sur I , alors l'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution dans $[a, b]$

3) Si f est strictement décroissante sur I , alors l'équation $f(x)=1$ admet au plus une solution dans $[a, b]$

4) Si f est strictement monotone sur I et s'annule pour un réel $\alpha \in [a, b[$ alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est $] \alpha, b]$

Exercice 8:

$\forall n \geq 2$, soit $f_n(x) = x^n - nx + 1$; $x \in [0, 1]$

1) Etudier la position relative de C_n et C_{n+1}

2) Dque l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α .

Quel est la monotonie de la suite (α_n)

Exercice 9:

$n \in \mathbb{N}$, soit $f_n(x) = x^3 + 3(n+1)x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

1) M qu'il existe unique réel $u_n \in]-1, 0[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

2) Mque $\forall x \in]-1, 0[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

3) Déduire que la suite u est convergente vers une limite que l'on calculera

Exercice 10:

Soit $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1°) Mque $f(x) = x$ a une seule solution $m \in \mathbb{R}$.

2°) Vérifier que $-2 < m < -1$

puis déduire le signe de $g(x) = f(x) - x$

Exercice 11:

Soit $f_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$,

où n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1)a) Dresser le tableau de variations de f_n

sur $[1, +\infty[$

b) En déduire le signe de $f_n(\frac{2n}{n+1})$

2)a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $] \frac{2n}{n+1}, +\infty[$ une seule solution qu'on notera U_n

b) Vérifier que $\frac{2n}{n+1} < U_n < 2$, $n \geq 2$

c) En déduire la limite de la suite (U_n)

3)a) Montrer que pour tout $x \in [1, 2]$, on a :

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$$

b) En déduire que la suite (U_n) est croissante

Exercice 12:

Soit $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $[0, 1]$

2)a) Vérifier que $f_{n+1}(a_n) \geq 0$.

b) Etudier alors la monotonie de la suite (a_n) .

c) En déduire que la suite (a_n) est convergente.

3)a) Montrer que pour tout n , $a_n - \frac{1}{2} = \frac{a_n^{n+1}}{2}$

b) En déduire la limite de la suite (a_n) (on pourra vérifier que $a_n \leq 0,7$ pour $n \geq 2$)

Exercice 13:

Soit $f(x) = x + 1 - \frac{1}{1+x^3}$

1) Dresser le tableau de variation de f

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution x_n dans l'intervalle $]n-1, n[$

c) Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

d) En déduire que (x_n) est non majorée.

2) Soit $g(x) = f(\frac{\sin x}{x})$; $x \in]0, \pi]$ et $g(0) = \frac{3}{2}$

Montrer que g est continue sur $[0, \pi]$

Exercice 14:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ la fonction f_n par : $f_n(x) = x - n \tan(x)$.

1) Montrer que pour tout $n > 0$, l'équation $f_n(x) = -n$ admet dans $[0, \frac{\pi}{2}[$ une solution unique qu'on note u_n

b) Vérifier que pour tout $n > 0$, $u_n \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ et que $\tan(u_n) = 1 + \frac{u_n}{n}$.

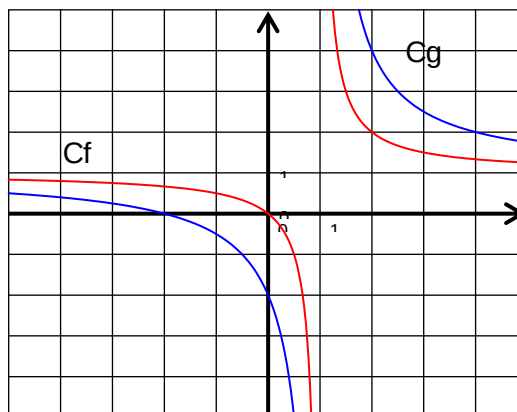
2) a) Montrer que pour tout $n > 0$ et pour tout $x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ on a : $1 + f_{n+1}(x) < f_n(x)$

b) Déduire alors que la suite (u_n) est strictement décroissante, et qu'elle converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 15:

Les fonctions f et g sont représentées dans le graphique ci-dessus.

La droite $D : x=1$ est une asymptote à C_f et C_g



La droite $D : y=1$ est une asymptote à C_f et C_g au voisinage de $+\infty$

a) Déterminer l'ensemble de définition E de $g \circ f$

b) Étudier la continuité de $g \circ f$

c) Déterminer les limites de $g \circ f$ aux bornes de E

Exercice 16

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$. C_f admet en $-\infty$ une asymptote d'équation

$y = 0$, C_f admet en $+\infty$ une branche infinie de direction la droite $y = x$

1°) Donner chacune des limites

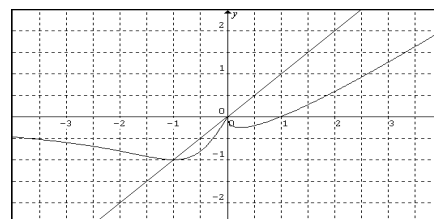
suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$



2°) Déterminer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x+1}{x}\right), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin[f(x)]}{\sqrt{f(x)}}$$

3°) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g .

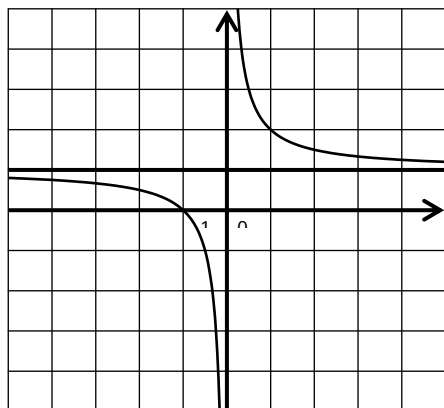
b) Montrer que C_g admet au moins trois asymptotes.

c) Déterminer l'image par g de l'intervalle $[-1, 0[$

Exercice 17:

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1[\setminus \{0\}$ par :

$f(t) = \frac{\sqrt{1-t}-1}{t}$ Et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ et connue par sa courbe C ci-dessous.



Les droites $D: y = 1$ et $\Delta: x = 0$ sont asymptotes à C

1) a) Etudier la limite de f en 0 et en $-\infty$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x}$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 1[\setminus \{0\}$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 = 0$$

b) Dédire que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution $\alpha \in]-1, 0[$

c) A l'aide de la calculatrice donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}

3) a) Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ g(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f \circ g(x)$$

b) $f \circ g$ est-elle continue sur $]-\infty, 0[$? (Justifie)

4) $f \circ g$ est-elle prolongeable par continuité en -1 .

Exercice 18:

(QCM)

Pour chaque question choisir la seule réponse correcte

1) Soit f une fonction continue sur $]-1, +\infty[$

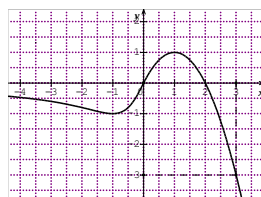
et dont la courbe est donnée ci-dessus.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(\sqrt{1-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2-x}{x}\right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x.f\left(\frac{1-x}{2x}\right) = -\infty$$

2) La courbe ci-contre Est la représentation graphique d'une fonction f définie et



continue sur $\mathbb{R}$. Cf admet au voisinage de:

- $-\infty$ une asymptote d'équation $y = 0$
- $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction la droite $x = 0$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)}{1-x^2} = 0. \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$c) f \circ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

Exercice 19:

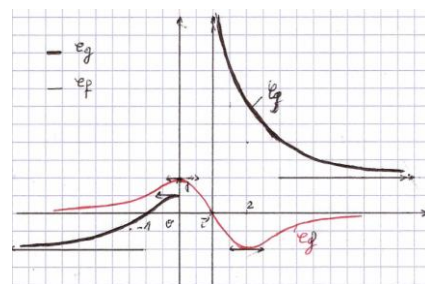
On a tracé ci-contre, dans le plan muni d'un repère

orthonormé, les courbes C_f

et C_g

représentatives de deux

fonctions f et g .



1) Déterminer

a) L'image de $]-\infty, 1[$ par f .

b) Le domaine de définition de

$g \circ f$.

2) Résoudre graphiquement $g \circ f(x) = 0$.

3) Calculer :

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^+} g \circ f(x). \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x).$$

$$c) (g \circ f)'(2).$$

4) Dresser le tableau de variation de $g \circ f$.

5) Soit l'équation (E) : $g \circ f(x) = \frac{1}{n}$, où $n \geq 3$

a) Montrer que l'équation (E) admet une solution unique $a_n \in]1, 2[$ et une solution unique $b_n > 2$.

b) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

c) Montrer alors que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.