

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1: (VRAI / FAUX)

I) Soient D et Δ deux droites strictement parallèles, A un point de D et B un point de Δ tel que (AB) n'est pas perpendiculaire à D.

Soit E l'ensemble des isométries qui transforment D en Δ et A en B.

a/ E contient une translation.

b/ E contient une rotation.

c/ E contient une symétrie orthogonale.

d/ E contient une symétrie glissante.

II)

1) ABDC étant un parallélogramme de centre O du plan.

$S_{(AD)} \circ S_O = S_{(BC)}$ si et seulement si ABDC est un losange.

3) Dans le plan orienté, on considère les points : A(1,1), B(2, 0), C(3, -1), E(1, 5), F(0,6)

Si f est une isométrie telle que f(A) = E et f(B) = F alors f(C) est le barycentre des points

pondérés (E, 1) et (F, -2)

Exercice 2 :

1) Soient A et B deux points distincts du plan. Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le segment [AB].

2) ABC désigne un triangle équilatéral. Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

Exercice 3:

Caractériser les transformations suivantes :

$$f : M(x,y) \mapsto M'(x',y') ; \begin{cases} x' = -x \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} + \frac{2+\sqrt{3}}{6} \\ y' = \frac{x}{2} + y \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$g : M(x,y) \mapsto M'(x',y') ; \begin{cases} x' = x \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{2} + 2 \\ y' = \frac{x}{2} + y \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{cases}$$

$$g : M(x,y) \mapsto M'(x',y') ; \begin{cases} x' = y \\ y' = x + 4 \end{cases}$$

$$h : z' = \bar{z} + \frac{1}{2}i$$

Exercice 4 TN 2010

Pour chacune de questions suivantes une seule de trois réponses est correcte laquelle.

ABCD est un carré de centre O tel que

$$(\widehat{AB, AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ et } I \text{ le milieu de } [AB].$$

Soit $S_{(BC)}$, $S_{(BD)}$ et $S_{(OI)}$ les symétries d'axes respectifs (BC), (BD) et (OI) et

$t_{\overline{BD}}$, $t_{\overline{CD}}$ et $t_{\overline{BC}}$ les translations de vecteurs respectifs $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ et $\overline{BC}$.

1) L'isométrie $S_{(BC)} \circ S_{(BD)} \circ t_{\overline{BD}}$ est

- a) une rotation
- b) une translation
- c) une symétrie glissante.

2) $t_{\overline{BD}} \circ S_{(BC)}$ est égale à

- a) $t_{\overline{CD}} \circ S_{(OI)}$
- b) $t_{\overline{BC}} \circ S_{(OI)}$
- c) $S_{(BC)}$.

3) Soit $r_1 = R(O, \frac{-\pi}{2})$ et

$r_2 = R(C, \frac{\pi}{2})$ alors $r_1 \circ r_2$ est

- a) la symétrie centrale de centre A
- b) la translation de vecteur CB
- c) la translation de vecteur AD

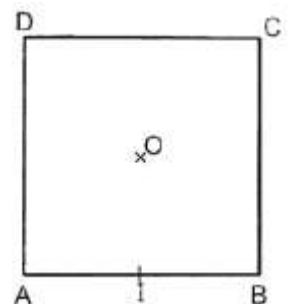
Exercice 5:

ABC étant un triangle rectangle direct et isocèle de sommet principal A. $I = B \cdot C$; $J = A \cdot C$; $K = A \cdot B$; $E = J \cdot A$ et $F = A \cdot K$.

1) Soit f une isométrie qui envoie K en J et laisse invariant [AI].

- a) Mque f fixe le centre du carré AKIJ : (f(O)=O)
- b) En déduire toutes les isométries qui transforment le triangle AKI en le triangle AIJ

2) a) Caractériser $g = S_{(IJ)} \circ S_{(AO)}$



- b) Soit $h = S_{(IJ)} \circ S_O$. Mque $h = t_{\vec{AJ}}$ o $S_{(FO)}$
3) Soit φ une isométrie qui transforme le triangle AKI en le triangle IJC
a) Mque $S_{(IJ)} \circ \varphi$ est une isométrie transformant AKI en AIJ
b) Déduire toutes les isométries qui transforment le triangle AKI en le triangle IJC

Exercice 6:

ABCD est un losange tel que $(\vec{AB}; \vec{AD}) = \frac{\pi}{3}$.
On désigne par I, J, K, L, et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA] et [BD]. On note Δ la médiatrice de AB et par Δ' la médiatrice de [CD]

- 1) Soit f l'isométrie définie par
 $f(A)=B$, $f(B)=D$ et $f(D)=C$
a) Montrer que f n'a pas des points fixes
b) Déduire la nature de f
2) Soit R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$
a) Démontrer que $f = R \circ S_{\Delta}$
b) A-t-on $f = S_{\Delta} \circ R$
3) a) Définir S telle que $R = S_{(BC)} \circ S$
b) En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = S_{(BC)} \circ T$ où T est une translation à préciser
4) Soit $T' = \frac{1}{2} \vec{AD}$ et on pose $g = (T')^{-1} \circ f$
a) Déterminer $g(D)$, $g(I)$ et $g(O)$
b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g .
c) Démontrer que $f = T' \circ g$ A-t-on $g \circ T' = f$

Exercice 7:

On définit l'application f qui $M(z)$ associe le $M'(z')$ définie par : $z' = -jz + i$ où $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$
1) Montrer que f admet exactement un seul point invariant Ω , dont on donnera l'affixe. Caractériser géométriquement f .
2) On définit dans le plan la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $M_0 = O$ et pour tout n , $M_{n+1} = f(M_n)$
a) Construire Ω , M_0 , M_1 , M_2
b) Pour tout entier n , on note z_n l'affixe de M_n et on pose $Z_n = z_n - e^{\frac{i\pi}{6}}$
Déterminer un nombre complexe a tel que pour tout entier n , $Z_{n+1} = a Z_n$

Mettre sous forme trigonométrique et déterminer un entier p strictement positif tel que $a^p = 1$
c) Calculer Z_n puis z_n en fonction de n . Calculer Z_{2011} et placer M_{2012} sur le dessin.

Exercice 8 :

Soit $f : z' = -i \bar{z} + 1$.
Montrer que f est une symétrie glissante. Puis caractériser f o f .

Exercice 9 :

ABC un triangle rectangle et isocèle et direct en A. I le milieu du segment [BC] et J celui du segment [AB]. Considérons les rotations R , R_1 et R_2 d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre respectifs I, A et C

- 1) Caractériser $S_{(IA)}$ o $S_{(AB)}$
2) Déterminer $R(A)$;
En déduire la droite Δ telle que $R = S_{\Delta} \circ S_{(IA)}$
3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f = R \circ R_1$
4) Déterminer $R_2 \circ R_1(B)$. Caractériser $R_2 \circ R_1$.

Exercice 10:

ABCD un carré direct de centre I, R et R' les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre respectifs A et C.
A' est le symétrique de A par rapport à B.
1) Déterminer $R'(D)$ et $R(B)$
Déduire la nature du triangle ACA'
2) a) Soit $g = r' \circ R^{-1}$.
Déterminer $g(A)$ puis caractériser g .

b) Soit $f = R' \circ R$, caractériser f .

3) Soit $h = t_{\vec{CA}} \circ R'^{-1}$

- a) Vérifier que $R'^{-1} = S_{(CA')} \circ S_{(CD)}$
b) Déterminer la droite Δ tel que $h = S_{\Delta} \circ S_{(CA')}$
c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h .

Exercice 11 :

Soit ABCD un losange de centre O, de sens direct et tel que : $AC=8$ et $BD=4$

- 1)a) Construire Δ la droite qui porte la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$
- b) Placer les points A' , B' , C' et D' les images respectives des points A , B , C et D par la symétrie orthogonale S_{Δ} .
- 2) Déterminer l'ensemble F des isométries du plan qui laissent globalement invariant $\{A, B, C, D\}$
- 3) Soit G l'ensemble des isométries du plan qui transforment $\{A, B, C, D\}$ en $\{A', B', C', D'\}$.
on pose $g = S_{\Delta} \circ f$

- a) Montrer que : $g \in G$ ssi $f \in F$
- b) Montrer que $S_{\Delta} \circ S_O$ est une symétrie orthogonale $S_{\Delta'}$ que l'on précisera
- c) Caractériser $S_{\Delta} \circ S_{(AC)}$ et $S_{\Delta} \circ S_{(BD)}$
- d) En déduire l'ensemble G

Exercice 12:

IJK est un triangle rectangle isocèle en I et direct.

$$O = J * K \text{ et } H = I * J. R = r(O, \frac{\pi}{2}) \text{ et } R' = r(I, \frac{\pi}{2})$$

- 1)a) Montrer que $R' = S_{(OI)} \circ S_{(IJ)}$
- b) Montrer que $R = S_{(OH)} \circ S_{(OI)}$
- c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de RoR'
- 2) Mque $S_{(IK)} \circ RoR'$ est une symétrie glissante
- b) Montrer que $f = S_{(IK)} \circ t_{\vec{JI}}$ est une symétrie orthogonale que l'on précisera
- 3) Considérons le repère orthonormé $(I, \overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IK})$ et g l'application du plan dans lui-même qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que
- $$\begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = y \end{cases}$$
- a) Mque g est une isométrie
- b) Donner les images des points H , O , J par g
- c) En déduire que $f = g$

Exercice 13 :

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$\text{Soit } f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}; M(x, y) \mapsto M'(x', y') \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{array} \right.$$

- 1-a) Montrer que f est une isométrie de $\mathcal{P}$.
- b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
- c) En déduire qu'il existe une droite (D) et un vecteur $\vec{u}$ uniques tel que :

$$\vec{u} \text{ est un vecteur directeur de } (D) \text{ et } f = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}} \circ S_{(D)}.$$

2- On se propose de déterminer le vecteur $\vec{u}$ et la droite (D) par deux méthodes.

-A-

- a) Déterminer les expressions analytiques de $f \circ f$.
- b) Caractériser l'application $f \circ f$ et en déduire le vecteur $\vec{u}$.
- c) Caractériser l'application $t_{-\vec{u}} \circ f$ et en déduire la droite (D) .

-B-

- a) Sachant que pour tout point M de $\mathcal{P}$ et son image M' par f on a : $M * M' \in (D)$;
donner une équation cartésienne de (D) .

b) En déduire le vecteur $\vec{u}$.

Exercice 14 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O . On note I le milieu du segment $[BC]$ et D le symétrique de A par rapport à O .

1. Montrer que $AO = DB$ et que I est milieu du segment $[OD]$.
2. Soit f une isométrie du plan qui envoie A sur D et O sur B . On pose $g = t_{\vec{BO}} \circ f$ et K le point d'intersection des médiatrices des segments $[AD]$ et $[BO]$.

a) Déterminer $g(O)$ et $g(A)$. En déduire que $g = S_{(BO)}$ ou $g = t_{\left(\vec{u}, \frac{2\pi}{3}\right)}$.

b) Montrer que l'on a : $f = t_{\vec{OB}} \circ S_{(BO)}$ ou $f = t_{\left(\vec{v}, -\frac{2\pi}{3}\right)}$.

3. On désigne par $f_1 = t_{\vec{OB}} \circ S_{(BO)}$ et $f_2 = t_{\left(\vec{v}, -\frac{2\pi}{3}\right)}$.

a) Déterminer $f_2^{-1} \circ f_1(O)$ et $f_2^{-1} \circ f_1(A)$.

- b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $f_1(M) = f_2(M)$.