

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x + 2}{e^x - 3} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{2x} - e^x + 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^{-x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x \ln x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

$$; \lim_{x \rightarrow -1} \frac{xe^{-x-1} + 1}{x+1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1 + e^{2x})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(1 + e^{2x}) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^n),$$

Exercice 2 :

1°) Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = x e^{x^2}, f(x) = \frac{1}{1 + e^x}, g(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$f(x) = e^{2x} \sqrt{1 + e^{2x}} ; f(x) = \sin x e^{\cos x}.$$

2) Résoudre l'équation : $5e^{4x} - 13e^{2x} - 6 = 0$.

3) Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

1) Calculer la dérivée f'

2) En déduire le tableau de variation de f

Exercice 3 :

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R}^+ \text{ par : } \begin{cases} f(x) = x e^{\frac{-1}{nx}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe de f_n .

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2) Etudier la position relative de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$.

3) Dresser le tableau de variations de f_n .

4) a) D que l'équation $f_n(x) = 1$ admet dans $\mathbb{R}^+ +$ une unique solution x_n .

b) Etudier la monotonie de la suite (x_n)

c) Mque $\forall n > 0, x_n > 1$

5) D que x_n est solution de : $x \ln x = \frac{1}{n}$

6) a – Justifier que (x_n) converge vers $\alpha \geq 1$.

b) Démontrer que $\alpha \ln \alpha = 0$, en déduire α .

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(0) = 1 \text{ et } f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}, x > 0$$

1°) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ e^x \geq 1 + x$

2°) Etudier la continuité de f en 0

3°) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \frac{e^{-x} - e^{-2x} - x}{x^2} t^2 + t - e^{-t} + e^{-2t}$$

a) Montrer que $\forall x > 0$ il existe un réel

$c \in]0, x[$ tel que $\varphi'(c) = 0$

b) Dédire que f est dérivable en 0.

$$4) \text{Mque } f'(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2} (2x + 1 - (x + 1)e^x) \quad x > 0$$

5) Etudier les variations de f et construire sa courbe C .

Exercice 7 :

A) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$, C_n sa courbe

1) Etudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$

2) $\forall n \geq 2$, étudier la position relative de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n-1}$ et vérifier que le point $A_n(n, f_n(n)) \in C_{n-1}$.

3) Construire C_1 et C_2 .

B) Soit u la suite définie $\forall n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = f_n(n)$

a) En utilisant les résultats de la partie A, démontrer que u est décroissante.

b) La suite u est-elle convergente ?

2) Soit $g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}$, $t \in [0, 1]$

a) Etudier les variations de g et

montrer que $\forall t \in [0, 1]$ on a : $\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}}$

3) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$
En déduire que $\forall n \geq 2$, on a $u_n \leq e^{1 - \frac{1}{4}(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1)}$

4) Démontrer que $\ln \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$

5) En déduire que $\forall n \geq 2$, on a : $u_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4} \ln(n)}$

Quelle est la limite de u .

Exercice 8 :

A) Soit $g(x) = (x-1)e^x + 1$

1) Etudier les variations de g et construire sa courbe C dans un r.o.n

2) Etudier la position relative de C et de $D : y = x$

3) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre C et D

4) mque : l'équation $xe^x - 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $\alpha \in]1, 2[$

B/ Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose $I(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^2}{2} e^t dt$

1°) Mque $0 \leq I(a) \leq e^a \cdot \frac{a^3}{6}$, $a > 0$;

en déduire $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{I(a)}{a^2}$

2°) Mque $0 \leq |I(a)| \leq \frac{|a|^3}{6}$ si $a < 0$;

déduire $\lim_{a \rightarrow 0^-} \frac{I(a)}{a^2}$

3°) En calculant $I(a)$ par une double intégration par partie montrer que : $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + I(a)$

C/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{(1+x)e^x - 1}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 2$$

1)a- Mque pour $x \neq 0$; $f(x) = 1 + \left(\frac{x}{-1 + e^x} \right) \cdot e^x$

b – Dédurre que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) M que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

3°) Soit $g(x) = -x - 1 + e^x$. Etudier les variations de g et déduire le signe de $g(x)$

4°) Dédurre le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

5°) Montrer que les droites

$D : y = 1$ et $D' : y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe C de f puis construire C' .

D/ Soit h la fonction définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{-1 + e^{2x}}{x}, & x > 0 \\ h(0) = 2 \end{cases}$$

1) Mque h est continue et dérivable en 0.

2) Etudier les variations de h

3) Soit $F(x) = \int_1^{\ln x} h(t) dt$, $x \geq 1$:

Mque F est dérivable sur $[1, \infty[$ et calculer $F'(x)$

5)a) Mque $\forall x > 3$, on a $F(x) \geq \int_1^{\ln x} \frac{2t-1}{t} dt$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

c) Dresser le tableau de variation de F , Calculer $F(e)$ et déduire le signe de F

6) Montrer que $\forall x > 1 : F(x) = \int_e^{x^2-1} \frac{1}{t \ln t} dt$

7)a) Montrer que $\forall x \geq 9, F(x) \geq \int_{\frac{x}{3}}^{\frac{x^2-1}{3}} \frac{1}{t \ln t} dt$

b) M qu'il existe $\alpha \in \left[\frac{x}{3}, x \right]$ tel que $F(x) \geq \frac{2x}{3} \frac{\alpha^2-1}{\alpha \ln(\alpha)}$

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ puis Construire la courbe β de F .

Exercice 9 : (6 points)

On a représenté ci-dessous la fonction g définie sur

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par : $g(t) = \frac{1}{t} e^{-t^2}$

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} g(t) dt, & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = \ln(2) \end{cases}$$

1) Pour $a > 0$, interpréter $F(a)$ et $F(-a)$ en terme d'aires.

En déduire que F est paire.

2) a) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$F'(x) = \frac{e^{-4x^2}}{x} (1 - e^{3x^2})$$

b) En déduire le sens de variation de F sur $]0, \infty[$.

3) a) Montrer que pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$.

b) En déduire que, pour tout réel $t > 0$, $\frac{1}{t} - t \leq g(t) \leq \frac{1}{t}$

c) Prouver que, pour tout réel $x > 0$,

$$\ln(2) - \frac{3x^2}{2} \leq F(x) \leq \ln(2)$$

d) Démontrer que F est continue et dérivable en zéro.

4) a) Montrer que, pour tout réel $t \geq 1$; $e^{-t^2} \leq e^{-t}$

b) En déduire que pour tout réel $x \geq 1$, $F(x) \leq \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$

c) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

5) a) Dresser le tableau de variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

b) Tracer l'allure de la représentation graphique de F dans un repère orthonormé,

unité graphique 4 cm. (On donne $F(0,5) \approx 0,4$ et $F(1) \approx 0,1$)

Exercice 10

Le but du problème est l'étude d'une fonction et le tracé de sa représentation graphique.

1 Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = -1 + (1-x)e^{-x}$$

a) Calculer $g'(x)$. Étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variation de g .

c) Dque pour tout x de $[0 ; +\infty[$ on a : $g(x) \geq 0$

2) Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x e^{-x} - x + 4.$$

Soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal (O, i, j) . (Unité : 2cm)

a) Vérifier que, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = g(x).$$

b) Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

Préciser la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que la droite D d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à C_f .

Étudier la position de C_f par rapport à D .

d) Construire la courbe C_f et préciser la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.

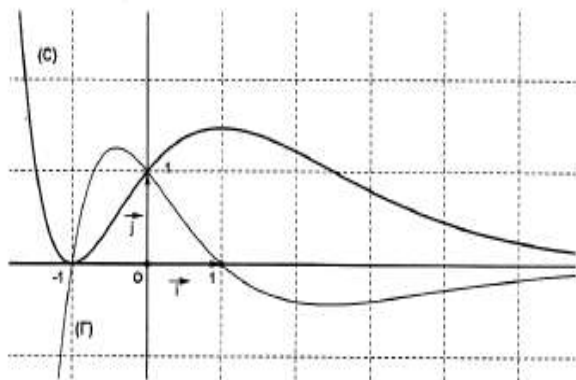
3) Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = -\frac{x}{2} + 4.$$

- a) Tracer sa représentation graphique D dans le même repère que Cf.
b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de Cf et D.
4) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2 ; 3]$

Exercice 3 (6 points)

I) On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes (C) et (f), représentatives d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f' .



- 1) Reconnaître la courbe représentative de f et celle de f' .
2) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f(-1)$ et $f'(-1)$.
3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe de f' , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

II) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

- 1) a) A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que $\int_{-1}^0 f(x) dx = 2e - 5$.
b) Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (f) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.
a) Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $[1, +\infty[$ une solution unique α et que $1.41 < \alpha < 1.42$.
c) Montrer que g^{-1} est dérivable en α et que $(g^{-1})'(\alpha) = \frac{\alpha+1}{\alpha(1-\alpha)}$, (g^{-1} désigne la fonction réciproque de g).

Exercice 12

Dans tout le problème n un entier naturel non nul.

A) 1) Soit $g_n(x) = n(x+1) + e^x$

- a) Dresser le tableau de variation de g_n :
b) Mque l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α_n .

Prouver que $-2 < \alpha_n < -1$

d) En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x .

2) Soit $f_n(x) = \frac{x e^x}{n + e^x}$.

On désigne par C_n la courbe de f_n .

a) Mque $f'_n(x) = \frac{e^x g_n(x)}{(n + e^x)^2}$

b) Mque $\alpha_n + 1 = f_n(\alpha_n)$

c) Donner le tableau de variation de f_n

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - x)$. Que peut-on conclure.

b) Etudier la position relative de C_n et de $D : y = x$

c) Etudier la position relative de C_{n+1} et C_n

d) Tracer C_1 et C_2

B) Soit $I = \int_{-1}^0 x e^x dx$ et $U_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$

1) Calculer I

2) Mque pour tout $x \in [-1, 0]$; $\frac{x e^x}{n} \leq \frac{x e^x}{n + e^x} \leq \frac{x e^x}{n+1}$

3) Mque la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

4) Soit $V_n = \sum_{k=1}^n U_k$

a) Mque pour tout $k > 0$, $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{1+k}$

b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k} \geq \ln(n+2) - \ln 2$

c) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n) = -\infty$.

Exercice 13:

A/ Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

1) a) Etudier les variations de f .

b) En déduire que pour tout $x \geq \ln \sqrt{2}$, $0 < f(x) \leq 1$

c) Tracer la courbe C de f .

2) On considère la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$g(x) = -\ln(\cos x)$$

a) Montrer que g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

et calculer $g'(x)$.

b) Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $h(\ln \sqrt{2})$.

c) Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $h'(x) = f(x)$.

B) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et F_n la fonction définie sur

$$[\ln \sqrt{2}, +\infty[\text{ par } : F_n(x) = \int_{\ln \sqrt{2}}^x [f(t)]^n dt$$

1) a) Montrer que $F_1(x) = h(x) - \frac{\pi}{4}$.

b) Déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C de f et les droites d'équations $y = 0$, $x = \ln 2$ et $x = \ln \sqrt{2}$

c)Vérifier que $f^2(t) = \frac{e^{-2t}}{1 - e^{-2t}}$. En déduire $F_2(x)$.

2)a)Vérifier que pour tout $t \geq \ln\sqrt{2}$, on a :
 $f(t) < 2e^{-t}$.

b)En déduire, en utilisant A-1, que $F_n(x) \leq \sqrt{2}$.

c)Déduire que la fonction F_n admet une limite finie en $+\infty$.

3)a)Montrer que pour tout $t \geq \ln\sqrt{2}$, on a : $f(t) \geq e^{-t}$

b)En déduire que la limite de la fonction F_n en $+\infty$ est non nulle.

C)On pose $u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$

1)a)Calculer u_1 et u_2 .

b)Montrer que la suite u est décroissante.

c)Déduire que la suite u est convergente.

2)a)Vérifier que $f^{n+2}(t) + f^n(t) = -f^{n-1}(t) \cdot f'(t)$

b)En déduire que $F_{n+2}(x) + F_n(x) = \frac{1}{n}[1 - f^n(x)]$

c)Montrer alors que $u_{n+2} + u_n = \frac{1}{n}$

d)Déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

3)Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

a)Montrer que $u_{2n+2} = \frac{(-1)^n}{2} (-v_n + \ln 2)$

b)En déduire la limite de la suite (v_n) .

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{-x}$.

A) 1) Etudier et représenter dans un repère orthonormé

(O, i, j) la fonction f

2) On désigne par A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectifs $x=1$ et $x=n$.

Calculer A_n puis donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

2)Montrer que la restriction de f à $[0, 1]$ réalise une bijection sur un intervalle J que l'on précisera. Soit C' la courbe de sa réciproque. Tracer C' dans le même repère.

Calculer l'aire du domaine limitée par les courbes C , C' et la droite $\Delta : y = -x + 1 + \frac{1}{e}$

1) Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n}$$

et k un réel supérieur ou égal à 2

a) Montrer que la suite u est monotone.

b) Montrer que $\forall x \in [k, -1, k]$;

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1)$$

c) Prouver alors que :

$$\frac{n}{e^n} + \int_1^n f(x) dx \leq u_n \leq \frac{1}{e} + \int_1^n f(x) dx$$

d) En déduire que la suite u est convergente.

B) Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$F(x) = \int_{\ln x}^{2 \ln x} f^2(t) dt$$

1)a)Justifier l'existence de $F(x)$ sur $[1, +\infty[$

b)Montrer que F est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que

$$F'(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x^5} (8 - x^2)$$

2) a)M que $\forall x \geq 1$ et $\forall t \in [\ln x, 2 \ln x]$,

$$\text{on a : } \frac{t^2}{x^4} \leq [f(t)]^2 \leq \frac{t^2}{x^2}$$

b)Mque $\forall x \geq 1$; on a :

$$\frac{7(\ln x)^3}{3x^4} \leq F(x) \leq \frac{7(\ln x)^3}{3x^2}$$

a) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x))$

3) Etudier les variations de F et donner l'allure de sa courbe Γ , on précisera la tangente à Γ au point d'abscisse 1. (On donne $F(2\sqrt{2}) \approx 0,11$)

Exercice 17:

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 e^{1-x}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, i, j) d'unité graphique 2 cm.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour C peut-on en tirer ?

b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f' .

c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe C .

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère

l'intégrale I_n définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

a. Établir une relation entre I_{n+1} et I_n .

b. Calculer I_1 , puis I_2 .

c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2 .

On la fera apparaître sur le graphique de la question 1 c.

3. a. Dque pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$$

b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 20:

Pour tout entier n , on considère la suite (u_n) définie

$$\text{par } u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} dx$$

$$1) \text{ On pose } v_n = \int_0^1 e^{-nx} dx$$

a) Calculer v_n

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} n v_n$.

2) a) Etablir que pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$2 \leq 1 + e^x \leq 2 e^x.$$

b) En déduire que pour tout n , on a :

$$\frac{1}{2} v_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2} v_n.$$

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$.

$$3) \text{ On pose } S_n = \sum_{p=1}^n u_p \text{ et } W_n = \sum_{p=1}^n v_p ; n \geq 1$$

$$a) \text{ Montrer que } 0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}$$

b) Montrer que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$$

c) En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n)$$

d) Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 22

I – Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est dérivable en 0 à droite.

$$2) \text{ Montrer que pour tout } x > 0, f'(x) = \frac{(1-x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$$

3° Dresser le tableau de variations de f

4° Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé

II – Soit F la fonction ; $x > 1$; $F(x) = \int_1^{\ln x} f(t) dt$

1) a) Mque F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

$$b) \text{ En déduire que } F(x) = \int_x^e \frac{1}{t^2 \ln t} dt$$

2° a) Montrer que pour tout réel $t > 1$, $\ln t < t - 1$

b) En déduire $\forall x \in]1, e[$,

$$F(x) \geq \frac{1}{e^2} \int_x^e \frac{1}{t-1} dt$$

c) Calculer alors la limite de F en 1 à droite.

3° a) Montrer que pour tout $x > e$, $F(x) \geq -\frac{1}{e}$

b) En déduire que F admet en $+\infty$ une limite finie L

III – Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \int_1^x f(t) dt$

1° Justifier l'existence de $\varphi(x)$ pour tout réel $x \geq 0$.

2° Vérifier que pour tout $x > 0$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = F(e^x)$

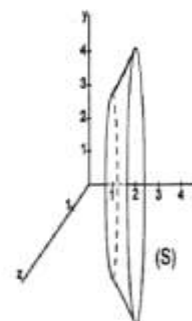
3° En déduire que $\varphi(0) = L$

4° Exprimer en fonction de L l'aire A du domaine limité par la courbe

C de f et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 5 (4 points)

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y = e^{\sqrt{x}}$, $x \in [1, 2]$ autour de l'axe (Ox) .
 Le but de cet exercice est de calculer le volume V de ce solide.



1) Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{t}} dt$.

Vérifier que $V = \pi F(2)$.

2) Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^x t e^{\sqrt{t}} dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $G'(x) = 2 F'(x)$.

b) En déduire que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $2 F(x) = G(x) - G(1)$.

3) a) Montrer que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $G(x) = (\sqrt{4x} - 1) e^{\sqrt{4x}}$.

b) Calculer alors V .

Exercice 23

1°) 1°) Soit $g(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$, $x > 0$

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} = +\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

b) Dresser le tableau de variation de g.

2°) Soit G la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$G(x) = g(x) - \int_0^{g(x)} \frac{dt}{1+t^2}$$

a) Mque G est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que

$$G'(x) = g(x)$$

b) Montrer alors que pour tout réel strictement positif

$$x, \int_0^x g(t) dt = g(x) - \int_0^{g(x)} \frac{dt}{1+t^2}$$

a) On admet que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

b) Dédire que $\int_0^{\ln \sqrt{2}} g(t) dt = 1 - \frac{\pi}{4}$

II°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\ln \sqrt{2}} (g(x))^n dx \text{ et } I_0 = \ln \sqrt{2}$$

1°) a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel positif x, on a:

$$(g(x))^n + (g(x))^{n+2} = \frac{1}{2} U'(x) \cdot (U(x))^{\frac{n}{2}} \text{ où } U(x) = e^{2x} - 1$$

b) Mque alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+2}$

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et déterminer sa limite.

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $U_n = I_{n+4} - I_n$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^n U_{4k+1} = I_{4n+5} - I_1$

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = (I_{n+4} + I_{n+2}) - (I_{n+2} + I_n).$$

$$\text{En déduire que } U_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2}.$$

c) Exprimer alors U_{4n+1} en fonction de n.

d) Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la

$$\text{somme } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{-1}{4n+3} + \frac{1}{4n+5}$$

Exercice 25 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$.

I) 1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

b) Etudier les variations de f.

c) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J à préciser.

b) Expliciter g(x) pour tout x de J.

c) Prouver que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α sur $]0, 1[$

et que $\alpha \in]0.7, 0.8[$.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ de g dans le même repère que f.

3) Calculer le volume V du solide de révolution

engendré par la rotation de l'arc γ autour de l'axe des abscisses où

$$\gamma = \{M(x, y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } 0 \leq x \leq \alpha\}.$$

II) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction F_n définie sur $[0, 1[$ par : $F_n(x) = \int_0^{g(x)} [f(t)]^n dt$ et $u_n = F_n(\alpha)$

1) a) M que pour tout n de $\mathbb{N}^*$; $0 \leq u_n \leq \alpha^{n+1}$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

2) Mque F_n est dérivable sur $[0, 1[$ et que

$$F'_n(x) = \frac{2x^{n+1}}{1-x^2}$$

3) a) Montrer que $F_{n+2}(x) - F_n(x) = \frac{-2x^{n+2}}{n+2}$

b) Dédire que $u_{n+2} = \frac{-2\alpha^{n+2}}{n+2} + u_n$.

c) M alors que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{2n} = \alpha - 2 \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^{2k}}{2k}$

d) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^{2k}}{2k}$

Exercice 26 (6 points)

Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ données dans le

graphique ci contre représentent

dans un repère orthonormé les fonctions f et g

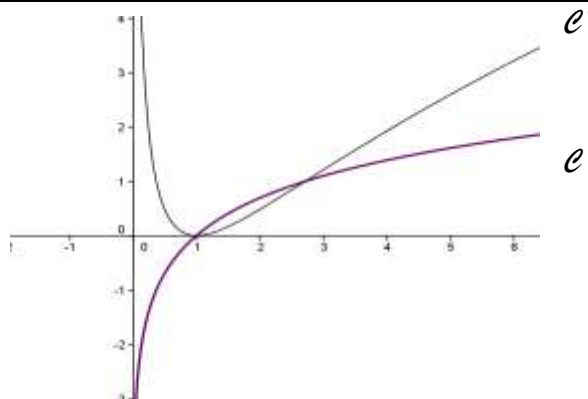
définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \ln x$ et $g(x) = \ln^2 x$

1) a) Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc γ autour de l'axe des abscisses.

où $\gamma = \{M(x, y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } 1 \leq x \leq e\}$.

b) Pour $x \in [1, e]$, on note M le point de la courbe $\mathcal{C}$ et N le point de la courbe $\mathcal{C}'$ de même abscisse x.

Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN soit maximale.



2)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\begin{cases} F(x) = \int_0^{g(x)} e^{-\sqrt{t}} dt, \text{ si } x > 0 \\ F(0) = 2 \end{cases}$$

a) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $F'(x) = \frac{2\ln x}{x} e^{-|\ln x|}$

b) Dédire que pour tout $x \in]0, 1]$, on a : $F(x) = 2(x\ln x - x + 1)$.

c) Etudier la continuité et la dérivabilité de F à droite en 0.

3) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) = F(\frac{1}{x})$

b) Expliciter F(x), pour $x \geq 1$

c) Dresser le tableau de variation de F puis construire sa courbe G dans un repère orthonormé.

Exercice 27:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}.$$

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la restriction de f à $]-\infty; 0]$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

B) Montrer que pour tout $x \in I$ on a

$$g^{-1}(x) = -\ln(1 + \sqrt{1+x}).$$

3) On donne ci-dessous la courbe représentative de C^{-1} de g^{-1} dans un repère orthonormé.

a) Tracer C la courbe représentative de f.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C et les droites $x = -\ln(2)$; $x = 0$ et $y = 0$.

c) En déduire la valeur de $\int_{-1}^0 \ln(1 + \sqrt{1+x}) dx$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $U_n = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \ln(2 - e^{-x^2}) dx$.

a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 \leq U_n \leq n \ln(2 - e^{-\frac{1}{n^2}})$

; calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - e^{-x})}{x}$

b) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice (6,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A/ On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$

par $f(x) = x e^{-x}$ et $g(x) = x^2 e^{-x}$.

La courbe C_g représentée ci dessous est la représentation graphique de g. On note C_f la courbe de f.

1)a-

Dresser le tableau de variation de f.

b- Montrer que le point $I(2, 2e^{-2})$ est un point d'inflexion de f.

c- Etudier la position relative de C_f et C_g .

2)a- Vérifier que pour tout réel x on a :

$$f(x) - x f'(x) = g(x).$$

b- Soit α un réel positif et T_α la tangente à C_f au point d'abscisse α .

Montrer que T_α coupe $(O, \vec{j})$ au point $N(0, g(\alpha))$.

c- En déduire une construction de T_α . Tracer alors T_2 et C_f .

d- Calculer en unité d'aires, l'aire de la partie du plan limitée par C_f , C_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

B/ Soit n un entier naturel non nul, et h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (1 - x) e^{-x} - n$.

a- Dresser le tableau de variation de h.

b- Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α_n et que $-\ln n \leq \alpha_n \leq 0$.

a- Montrer que $\alpha_n = \ln(\frac{1 - \alpha_n}{n})$.

b- Sachant que pour tout réel x strictement positif, on a $\ln x \leq x - 1$, prouver que $h(-\ln n) \leq 0$.

c- Justifier que $\alpha_n \leq -\frac{1}{2} \ln n$. Dédire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$

