

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormé de l'espace

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points :

A de coordonnées (1,1,0), B de coordonnées (2,0,3), C de coordonnées (0,-2,5) et D de coordonnées (1,-5,5).

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\vec{MM'} = \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système (A, 1); (B, 1); (C, 2), et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3,3,0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

Exercice 2 : Q.C.M

A) ABCDEFGH est un cube d'arête 1

On munit l'espace du r.o.n. $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

1) $\vec{AC} \cdot \vec{BH}$ est égal à a) 0 ; b) $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{3}$

2) Une équation du plan (ECG) est :

a) $x + y - 2 = 0$, b) $x + y - 1 = 0$, c) $x - y = 0$

3) Soit $I = E * G$ et S la sphère de centre I et passant par F. Alors on a :

a) Le plan (BEG) est tangent à S

b) L'intersection de S et le plan BEG est le cercle de diamètre [EG]

c) L'intersection de S et le plan BEG est le cercle circonscrit au triangle EGH.

B) D. L'espace est rapporté à un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan P d'équation :

$2x + y - 2z + 1 = 0$ et le point

A(2, 1, 0).

Soient S la sphère de centre A et sécante à P suivant le cercle (C) de rayon $\sqrt{5}$; et S' la sphère de centre A et tangente à P.

1. Le rayon R de S est :

a. $R = \frac{7}{3}$ b. $R = 3$ c. $R = 1$ d. $R = \sqrt{\frac{61}{5}}$

2. Le centre I de (C) est :

a. $I(0, -1, 0)$ b. $I(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$

c. $I(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$

d. $I(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$.

3. a. Il n'existe aucune homothétie de centre A transformant S en S'.

b. Il existe une seule homothétie de centre A transformant S en S'.

c. Il existe deux homothéties de centre A transformant S en S'.

d. Il existe plusieurs homothéties de centre A transformant S en S'.

Exercice 3 :

Dans l'espace E rapporté à un r.o.n. direct

$R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A(2,3,1) et B(1,-1,2) ; et la droite D passant par B et de

vecteur directeur $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Calculer d(A, D)

Exercice 4 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B, C et I de coordonnées respectives : (-1; 2; 1), (1; -6; -1), (2; 2; 2) et (0; 1; -1).

1) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les trois points A, B et C.

2) Q est le plan d'équation : $x + y - 3z + 2 = 0$ et Q' le plan d'équation : $y = 0$

a) Montrer que les plans Q et Q' sont sécants selon une droite D.

b) Déterminer un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D.

3) a) Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

b) Déterminer l'intersection de la sphère S et de la droite D.

Exercice 5 :

Dans l'espace E rapporté à un r.o.n. direct

$R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points : A(-1,0,1)

B(2, 1, -1); C(1, 3, 0); D(-2, 2, 2) et S(-2, -2, 0)

1) Montrer que les points A, B et D ne sont pas alignés.

2) Donner une équation cartésienne du (ABD).

3) Calculer l'aire du triangle ABD.

4) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

6) Calculer le volume de la pyramide SABCD

7) En déduire la distance du point S au plan ABD

Exercice 6 :

Soit ABCDEFGH un cube. $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

est un repère orthonormé direct de l'espace. On désigne par I le centre du carré ABCD.

- a) Déterminer $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$
b) En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}) \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$
c) Déterminer l'ensemble (F) des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

Exercice 7

Dans l'espace E rapporté à un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(1, 2, 2), B(3, 2, 1) et C(1, 3, 3)

- 1) Montrer que A, B et C déterminent un plan. Donner une équation de ce plan.
2) On considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives : $P_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0$ et $P_2 : x - 3y + 2z + 2 = 0$

- a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite Δ
b) Montrer que le point C appartient à la droite Δ .
c) Démontrer que le vecteur $\vec{u}(2, 0, -1)$ est un vecteur directeur de la droite Δ
d) En déduire que la droite Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 3 \\ z = -k + 3 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

- 3) Déterminer la distance du point A à la droite Δ .

Exercice 8 :

Dans l'espace E rapporté à un r.o.n $R_o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ on considère le plan

$P_m : 2x - y + 2z + m = 0, m \in \mathbb{R}$
et $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 8 = 0$

- 1) Montrer que S est une sphère et déterminer son rayon R et son centre A.
2) Étudier suivant m la nature de $P_m \cap S$.
3) On prend $m = 3$, caractériser $P_3 \cap S$.

- 4) On considère la droite D : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t; t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t \end{cases}$

- a) Établir une équation du plan Q contenant D et perpendiculaire à P_m .
b) Montrer que Q est tangent à la sphère S.

Exercice 9 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points A(2, -1, 1); B(-1, 1, -1), C(1, 2, 0).

- 1) a) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
b) En déduire que A, B et C ne sont pas alignés.
c) Calculer l'aire du triangle ABC
2) Soit $P : 2x + y - 5z - 4 = 0$ et Δ la droite d'équations cartésiennes : $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = z - 1$

- a) Déterminer $P \cap \Delta$
b) Vérifier que la droite (BC) est incluse dans Δ et que Δ passe par le point A.
3) Soit D(-2, 3, -1)
a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
b) Calculer la volume du tétraèdre ABCD.
4) Déterminer l'ensemble des points M de E tels que $(\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{AM}) \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$

Exercice 10 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Soit S la sphère : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 19 = 0$

- 1) Déterminer le centre I et le rayon de S.
2) Soit $m \in \mathbb{R}$ et $P_m : x - 2y - 2z + m = 0$
a) Déterminer suivant les valeurs de m la position relative de P_m et S
b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles P_m et S sont sécants suivant un cercle de rayon 4
c) Montrer que $S \cap P_2$ est un cercle (C) de centre H(0, 1, 0)
3) Soit D la droite passant par A(-4, -2, 1) de vecteur directeur $u(2, 0, 1)$
a) Calculer d(H, D)
b) Montrer que D et P_m sont parallèles pour tout réel m.
c) Déterminer la valeur de m pour laquelle $D \subset P_m$
d) En déduire la position de D et (C)

Exercice 11 :

L'espace est muni d'un repère ortho normal

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le tétraèdre ABCE tel que A(1, 0, 2), B(0, 0, 1), C(0, -1, 3) et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

- 1) a) Vérifier que E(0, 2, 3)
b) Calculer la volume du tétraèdre ABCE
2) Soit $P : x - 2y - z + 5 = 0$.
a) Montrer que P est parallèle à (ABC)
b) Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que $K \in P$
3) Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K
a) Déterminer le rapport de h
b) Le plan P coupe les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J
Calculer la volume du tétraèdre EIJK

Exercice 12 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé

direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points A(1, -4, 0); B(4, -1, 3), C(-2, 2, -3).

- 1) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2) Calculer l'aire du triangle ABC

3) Montrer que (AD) est perpendiculaire à (ABC)

4) a) Calculer le volume du tétraèdre ABCD

b) Calculer l'aire du triangle BCD

c) En déduire la distance du point A au plan BCD

Exercice 13:

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la droite Δ passant par le point $A(-3, -1, -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ et la droite D passant par le point $B(3, 2, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

1) a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$

b) Justifier que les droites D et Δ sont orthogonales et non coplanaires.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant Δ et parallèle à D

2) Soit S la sphère de centre $C(-1, 0, 1)$ et de rayon 6 et P le plan d'équation $2x + y + 2z + 13 = 0$

A) Montrer que S et P se coupent suivant un cercle de centre A. Déterminer le rayon de ce cercle.

b) Montrer que la droite D est tangente à la sphère S au point B.

3) a) Calculer AB. En déduire que le point C appartient au segment [AB]

b) Déterminer alors une droite perpendiculaire aux droites D et Δ . (TN SCX 2009)

Exercice 14: (TN SCX 2009)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et ABCDEFGH est un parallélépipède tel que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$

1) a) Vérifier que $\overrightarrow{AG} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$

b) Déterminer les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EG}$, et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

2) Soit α un réel différent de 1 et M le point de coordonnées $(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$

a) Vérifier que M décrit la droite (AG) privé du point G

b) Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).

3) Soit $\mathcal{V}$ le volume du tétraèdre MEBG

a) Exprimer $\mathcal{V}$ en fonction de α

b) Calculer le volume du tétraèdre AEBG

c) Pour quelles valeurs de α , $\mathcal{V}$ est-il égale au volume du parallélépipède ABCDEFGH.

Exercice 15

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère

orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points $A(1, 2, 1)$, $B(2, 2, 0)$, $C(0, 4, 1)$ et $D(3, 2, 2)$.

1) a- Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis déduire l'aire du triangle ABC.

b- Soit P le plan contenant les points A, B et C.

Mque P a pour équation $2x + y + 2z - 6 = 0$.

c- Calculer la distance du point D au plan P.

déduire une équation cartésienne de la sphère S de centre D et tangente au plan P.

2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2 et $S' = h(S)$.

a- Préciser le centre et le rayon de S' .

b- Déduire que P coupe S' suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 16

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. On désigne par I, J et K les milieux respectifs de [BC], [AE] et [CD]. On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1°) a) Montrer que

$$\overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{GK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AE}$$

b) Calculer le volume du tétraèdre JGKI.

2°) a) Donner une équation cartésienne du plan (GIK)

c) Donner une représentation paramétrique de la droite (CJ).

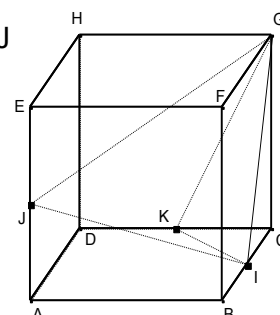
3°) La droite (CJ) coupe le plan (GIK) en un point H'.

a) Vérifier que la droite (CJ) est perpendiculaire au plan (GIK)

b) Déterminer les coordonnées du point H'.

4°) Soit S la sphère passant par C et tangente au plan (GIK) en H'.

a) Déterminer le centre Ω et le rayon R de S.



b) Montrer que le plan (ABC) coupe S suivant un cercle ζ dont on précisera le rayon r.

c) Soit h l'homothétie de centre C et qui transforme J en Ω . Soit Ω' le centre de ζ .

Montrer que $h(A) = \Omega'$.

Exercice : 17

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points :

$A(-2, 1, 1)$; $B(2, 0, -2)$ et $C(2, 1, -1)$

1) a) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

a) En déduire qu'une équation du plan P passant par A, B et C est : $x - 2y + 2z + 2 = 0$

2) Soit $S = \{x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0\}$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R

b) Montrer que $S \cap P$ est un cercle que l'on caractérisera.

3) Soit h l'application de l'espace dans lui-même, qui à tout point M(x, y, z) associe le point

$$M'(x', y', z') \text{ tel que } \begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y - 6 \\ z' = -2z - 6 \end{cases}$$

a) Montrer que h est une homothétie de centre I dont on déterminera le rapport

b) Donner une équation cartésienne du plan P' image du plan P par h

c) Quelle est la position relative de P' et S.

d) Calculer le volume du tétraèdre ABCI et en déduire le volume de son image par h

Exercice 18 : (4 points)

Dans l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points A(1 ; 0 ; 1)

D(2 ; 2 ; 2) et N(0, 0, 2).

1) a) Montrer que le triangle ADN est rectangle en A.

b) Déterminer $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AN}$.

c) Déterminer le volume du tétraèdre ADNO.

2) a) Donner la représentation paramétrique de l'axe Δ du cercle circonscrit au triangle ADN.

b) Ecrire une équation cartésienne du plan Q médiateur du segment [OA]

c) Déterminer le centre et le rayon de la sphère passant par les points N, A, D et O.

3) Soit $S(I(0 ; 2 ; 1), r = \sqrt{5})$

Montrer que S et Q sont sécants selon un cercle à préciser.

4) Soit h une homothétie de centre O de rapport k. Déterminer les valeurs de k pour que S soit tangente au plan Q' = h(Q)

Exercice TN 2011:

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points

A(1,3,2) ; B(1,-1,-2) et C(2,4,1)

1) a- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b- Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z = 0$.

2) soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$.

a- Déterminer le centre I et le rayon r de S.

b- Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle (γ) de diamètre [AB].

c- Montrer que la droite (AC) est tangente au (γ).

3) soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.

a) Déterminer le rayon de la sphère S' et les coordonnées de son centre J.

b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle (γ')

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (γ') en un point E que l'on précisera.

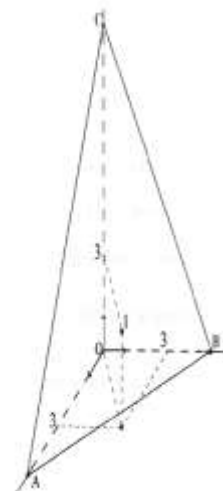
Exercice 3 (5 points)

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un repère orthonormé direct de l'espace.

Dans la figure ci-contre OABC est un tétraèdre

tel que $\overrightarrow{OA} = 5\vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = 10\vec{w}$ et

I est le point de coordonnées (3,3,3).



1) Vérifier que le plan (ABC) a pour équation

$$2x + 2y + z - 10 = 0.$$

2) Soit S la sphère de centre I et de rayon 3.

a) Quelle est la position relative de S et du plan (ABC) ?

b) Montrer que S est tangente aux plans (OAB), (OAC) et (OBC).

3) Soit k un réel non nul et h l'homothétie de centre O et de rapport k.

On désigne par S', la sphère image de S par h.

a) Montrer que S' est tangente aux plans (OAB), (OAC) et (OBC).

b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles S' est tangente au plan (ABC).

4) Déterminer le centre et le rayon de la sphère tangente intérieurement aux quatre faces du tétraèdre OABC.