

Exercice :1

- 1) Résoudre l'équation (E) : $2y' + 3y = 6$
- 2) Démontrer qu'il existe une unique solution g de (E) vérifiant la condition $g(-1) = 0$

Exercice :2

- 1) Résoudre l'équation $y'' + y = 0$
- 2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = 0$
- a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$ vérifier que g est un élément de E
- b) Soit f un élément de E . Vérifier que pour tout réel x , $f''(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x)$
- c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation $y'' + y = 0$
- d) Déterminer alors l'ensemble E . (TN 2009)

Exercice :3

- 1) Résoudre l'équation différentielle : $y' - y \ln 2 = 0$
- 2) Déterminer la solution particulière f telle que sa courbe représentative C dans le repère cartésien $(O, ,)$ passe par le point de coordonnées $(3, 4)$
- 3) Étudier la fonction f et tracer la courbe C .

Exercice :4

- 1) Résoudre l'équation : $y'' + 3y = 0$
- 2) Déterminer la solution particulière f de cette équation telle que la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, passe par le point de coordonnées $(0, 1)$ et admette en ce point une tangente de coefficient directeur nul.
- 3) Tracer la courbe représentative de la restriction de f à $[0, \frac{\pi}{\sqrt{3}}]$

Exercice 5:

- Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = \sin x$
- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E₀) : $y' - 3y = 0$



- 2) Déterminer deux réels a et b tel que la fonction g définie par $g(x) = a \cos x + b \sin x$ soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$
- 3) Montrer que f est solution de (E) ssi $f - g$ est solution de (E₀) sur $\mathbb{R}$
- 3) Déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Taux d'alcoolémie

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en gL⁻¹) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur $\mathbb{R}^+$, l'équation différentielle: (E): $y' + y = a e^{-t}$ où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $g(t) = f(t) e^t$
Démontrer que g est une fonction affine.
2. Exprimer $f(t)$ en fonction de t et de a .
3. Dans cette question, on suppose que $a = 5$.
a. Étudier les variations de f et tracer sa courbe. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.
b. Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à 0,5 gL⁻¹.

Exercice 7

Soit m la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$: $t \mapsto m(t)$ où $m(t)$ est la masse de sel, en grammes, que contient une "solution salée" (eau + sel) à l'instant t , t en minutes. Nous admettons que la fonction m vérifie : $m(0) = 300$ et m est une solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) $5y' + y = 0$.

- 1.a. Résoudre l'équation (E) (y fonction de t).
- 1.b. Montrer que pour tout t de $[0 ; +\infty[$ on a : $m(t) = 300 e^{-0,2t}$
2. Déterminer le réel t_0 tel que $m(t_0) = 150$.
3. Nous admettons qu'il est impossible de détecter la présence de sel à l'instant t ssi, $m(t) \leq 10^{-2}$.
A partir de quel instant est-il impossible de détecter la présence de sel ?

Exercice 8

- 1) a. Résoudre l'équation différentielle: (E) $4y' + 3y = 0$
b) Déterminer la fonction f , solution de (E) telle que $f'(0) = -6$.
2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $I = [0 ; 4]$ par $g(x) = 8e^{-0,75x}$.
2. a. Étudier les variations de g sur I et tracer sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm).
2. b. Soit A le domaine plan compris entre la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$. Calculer le volume V du solide engendré par

la rotation du domaine A autour de l'axe des abscisses ($x'x$).

(On rappelle que, dans ce cas, le volume V est donné par: $v = \int_a^b \pi [g(x)]^2 dx$).

On donnera la valeur exacte de V en cm^3 puis sa valeur approchée arrondie au mm^3 .

Exercice 9

1. Soit (E_1) l'équation différentielle $3y' + 4y = 0$.

1.a. Résoudre cette équation différentielle.

1.b. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E_1) qui vérifie $f(0) = 8$.

2. Soit (E_2) l'équation différentielle $y'' + 36y = 0$.

2.a. Résoudre cette équation différentielle.

2.b. Déterminer la solution particulière g de

l'équation (E_2) telle que $g(\frac{\pi}{2}) = -1$ et $g(\frac{\pi}{4}) = 1$.

2.c. Montrer que la solution particulière trouvée au

2.b. peut s'écrire $g(x) = a \cos(6x + b)$ où a et b sont des réels que l'on déterminera.

Exercice 10

1. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle : $y' + y = 0$

2. Trouver la solution particulière f de cette équation vérifiant $f(0) = 3$

3. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

Exercice 11

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' - 0,5y = 0$.

Déterminer la solution qui prend la valeur e^{-1} pour $x = 1$.

2. Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{0,5x - 1,5}$

Calculer à l'aide d'une intégration par partie :

$$\int_0^1 x f(x) dx$$

Exercice :12

1. Résoudre l'équation différentielle : $4y'' + y = 0$

2. Déterminer la solution particulière de cette

équation différentielle vérifiant : $\begin{cases} f(\pi) = \sqrt{3} \\ f'(\pi) = \frac{-1}{2} \end{cases}$

3. Montrer que cette solution f vérifie, pour tout x réel $f(x) = 2\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$

4. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation d'inconnue x : $f(x) = 1$; en donner les solutions appartenant à l'intervalle $[0; 4\pi[$.

Exercice 13:

1. Résolvez l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$, où y est une fonction inconnue de la variable x .

2. Déterminez la fonction f solution de cette équation, telle que : $f(\frac{\pi}{4}) = -2$ et $f'(\pi) = 8$

3. Montrez que, pour tout réel x, cette solution particulière peut s'écrire : $f(x) = 2\sqrt{2}\cos(4x - \frac{\pi}{4})$

Exercice 14

On se propose de résoudre l'équation différentielle : (E): $y' - 2y = x e^x$.

1) On admet qu'il existe une fonction unique f_0 solution de (E) vérifiant $f_0(0) = 1$.

Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de f_0 en son point d'abscisse 0.

2) On considère l'équation différentielle

(E_0): $y' - 2y = 0$,

donner les fonctions solutions de (E_0).

3) Soient a et b deux réels et soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (ax+b)e^x$.

a- Déterminer le couple (a, b) tel que f soit solution de (E).

b-Mque g est solution de (E) ssi $g - f$ est solution de (E_0).

c- En déduire l'ensemble des solutions de (E).

4) Déterminer la solution g_0 de l'équation (E) qui prend 1 en 0.

Exercice 15:

On considère l'équation différentielle suivante : $4y'' + 25y = 2x + 1$ (1)

1) Déterminer un polynôme g du premier degré solution de (1) .

2) Démontrer qu'une fonction f est solution de (1) si et seulement si $f-g$ est solution de l'équation (2) : $4y'' + 25y = 0$ (2)

3) En déduire les solutions de (1) .

4) Trouver la solution h de (1) vérifiant $h(0) = 1$ et $h'(0) = 1$

Exercice 16

On considère les équations différentielles :

$y'' + 4y = 0$ (E_0) et $y'' + 4y = 3\cos x$ (E)

1) Résoudre (E') sur IR

2) Montrer que la fonction cosinus est solution de (E)

3) En déduire les solutions de (E) , puis la solution vérifiant les conditions initiales :

$f(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Tracer sa courbe représentative .