

Exercice 1 : Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse. Dans ce qui suit a, b et c trois entiers.

1) Si $a^2 \equiv b^2 \pmod{8}$ alors $a \equiv b \pmod{8}$

2) Si $2a \equiv 2b \pmod{8}$ alors $a \equiv b \pmod{8}$

3) Si a divise b et a divise c alors a^2 divise bc

4) Le reste de la division euclidienne de 2^{2010} par 11 est égal à 1

5) si un entier x est telle que :

$x^2 + x \equiv 0 \pmod{6}$ alors $x \equiv 0 \pmod{3}$

6) Pour tout n, on pose $a_n = 2^n + 3^n$

alors $a \equiv 0 \pmod{5}$ pour tout n impair

7) Si $2a \equiv 2b \pmod{7}$ alors $a \equiv b \pmod{7}$

8) Pour tout entier naturel n:

a) $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5

b) $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.

9) n étant un entier impair et a et b deux entiers.

Si n divise a + b et n divise a - b alors n divise a et n divise b.

10) : « Le reste de la division euclidienne de 2011^{2011} par 7 est 2 ».

• Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.

11) On considère l'entier $N = 11^{2011}$.

L'entier N est congru à 4 modulo 7.

12)

a) $x^3 \equiv x \pmod{2}$.

b) Si $x \equiv 2 \pmod{14}$ alors $x \equiv 1 \pmod{7}$.

c) Si $4x \equiv 10y \pmod{5}$ alors $x \equiv 0 \pmod{5}$.

13) Le quotient dans la division euclidienne de -2011 par 87 est -23

Exercice 2:

Déterminer suivant les valeurs de n, le reste modulo 10 de 7^n

En déduire le chiffre des unités du nombre

43578707^{327}

Exercice 3:

1) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 5 de 3^n .

2) On pose $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$

Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division de A_n modulo 5

3) Résoudre alors $A_n \equiv 3 \pmod{5}$

Exercice 4:

1) a) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 3 de 2^n .

b) Déterminer le reste modulo 3 de $(40502)^{2009}$

2) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $5^{2n} \equiv 1 \pmod{3}$

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels tels que $2^n - 5^{2n} \equiv 0 \pmod{3}$

3) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $:(40502)^n - (40525)^n \equiv 3 \pmod{3}$

Exercice 5 :

Soit $n \in \mathbb{N}$

1) Démontrer que le chiffre de unités de n est donné par le reste de la division euclidienne de n par 10

2) a) Montrer que $3^n \equiv 1 \pmod{10}$ ssi $n \equiv 0 \pmod{4}$

b) Quel est le chiffre des unités de $N_1 = 3^{1029}$

c) Quel est le chiffre des unités de

$N_2 = 373^{2531} \times 2353^{190}$

3) a) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 10 de 7^n .

b) En déduire le chiffre des unités du nombre

43578707^{4327}

4) Soit $n \geq 2$

a) Démontrer par récurrence que le reste de la division euclidienne de 6^n par 10 est 6

b) Quel est le chiffre des unités de 9^n

c) En déduire le chiffre des unités de $N_3 = 426^{1259} \times 859^{12235}$

5) Quel est le chiffre des unités de $6^n \times 9^n$

Exercice 6:

Soit p un nombre premier.

1) Montre que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$

on a $C_p^k \equiv 0 \pmod{p}$

2) Montrer alors que pour tout entier naturel a

on a : $a^p \equiv a \pmod{p}$

3) Démontrer que pour tout entier n, $n^5 - n$ est divisible par 10

4) a) Soit a et b deux entiers naturels Traduire en terme de congruence la propriété : a et b ont le même chiffre des unités

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$

Démontrer que n^{p+4} et n^p ont le même chiffre des unités

Exercice 7:

Soit a et b deux entiers non nuls et n un entier naturel impair.

1) a) Démontrer que $a+b$ divise $a^n + b^n$

b) En déduire que 15 divise $2^{45} + 5^{45} + 10^{45} + 13^{45}$

2) Prouver, sans effectuer de division, que 14 divise 1064

Exercice 9

Montrer que pour n entier naturel, $(n+1)^n - 1$ est divisible par n^2 .

Exercice 10:

1) Démontrez que, pour tout entier naturel n :

$2^{3n}-1$ est un multiple de 7.

Déduisez-en que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et

que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.

2) Déterminez les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3) Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier:

$$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}.$$

a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7?

b) Démontrez que si $p = 3n + 1$, alors A_p est divisible par 7.

c) Étudiez le cas où $p = 3n + 2$.

4) On considère les nombres a et b écrits dans le système binaire:

$$a = 1001001000 \text{ et } b = 1000100010000.$$

Vérifiez que ces deux nombres sont des entiers de la forme A_p .

Sont-ils divisibles par 7?

Exercice 11 :

Soit a et n deux entiers naturels non nuls.

1) Démontrez que si a divise $2n+5$ et a divise $3n-4$ alors a divise 23

2) Démontrez que si a divise $15n+2$ et a divise $10n+7$ alors a divise 17

Exercice 12 :

Soit n un entier.

1) Dque 8 divise $3n+5$ ssi 8 divise $n+23$

2) D que 5 divise $2n+1$ ssi 5 divise $12n-9$

Exercice 13 :

Démontrer par récurrence que pour tout

$$n \in \mathbb{N}, 3^{n+4} - 5^{2n+7} \text{ est divisible par } 2$$

Exercice 14:

Déterminer tous les entiers dont la division euclidienne par 17 donne 5 pour quotient.

Exercice 15

1) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2010 par 11.

2) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.

3) Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2010} + 2010$ par 11.

Exercice 16:

Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 3^n par 8.

Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $3^n \cdot n - 9n + 2$ soit divisible par 8?

Exercice 17:

Montrez que pour tout entier naturel n , $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Exercice 18

Montrez que pour tout couple d'entiers relatifs

(a, b) , si a et b ne sont pas divisibles par 7

alors $a^2 + b^2$ n'est pas divisible par 7.

Montrez que pour tout n entier naturel, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

Exercice 19

Déterminez l'ensemble des x entiers relatifs tels que : $x^2 + 3x$ soit divisible par 7.

Exercice 20:

Montrer que pour n entier naturel, $(n+1)^n - 1$ est divisible par n^2

Exercice 21:

Déterminer les entiers x vérifiant les conditions imposées.

$$x \equiv 3 \pmod{5} \text{ et } 0 < x < 29$$

$$14 \equiv x \pmod{4} \text{ et } 0 < x < 4$$

$$23 \equiv 9 \pmod{x} \text{ et } 10 < x < 28$$

Exercice 22

Soit x et y deux entiers naturels tels que

$$x \equiv 2 \pmod{5} \text{ et } y \equiv 3 \pmod{5}$$

Déterminer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des nombres suivants.

$$a) x^2 + 3y, \quad b) 2x^3 - y^2$$

Exercice 23:

a) Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de 4^n par 11

b) Déterminer les entiers naturels n tels que

$$3^{n+3} - 4^{n+4} \equiv 0 \pmod{11}$$

Exercice 24

$$\text{Démontrer que } 2^{770} - 5^{2477} \equiv 1 \pmod{7}$$

Exercice 25

Déterminez l'ensemble des x entiers relatifs tels que : $x^2 + 3x$ soit divisible par 7.

Exercice 26

x et y désignent des entiers.

$$a) \text{Dque } x^2 \equiv 0 \pmod{8} \text{ ou } x^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

ou $x^2 \equiv 4 \pmod{8}$

b) en déduire les restes possibles de la division euclidienne de $x^2 + y^2$ par 8

Exercice 27:

Déterminer tous les entiers n tels que

$$n^2 \equiv 4 - 2n \pmod{5}$$

Exercice 28:

1) Soit n un entier

Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^3 par 11

2) Déterminer tous les entiers n tels que

$$(n+5)^3 \equiv 9 \pmod{11}$$

Exercice 29:

a) Déterminer l'ensemble E des entiers x tels que $x + 3 \equiv 3 \pmod{8}$

b) Déterminer l'ensemble F des entiers x tels que $3x \equiv 5 \pmod{8}$

c) Déterminer l'ensemble G des entiers x tels que $x^2 + 5x - 2 \equiv 0 \pmod{6}$

c) Déterminer l'ensemble H des entiers x tels que $x^2 \equiv 4 - 2x \pmod{5}$

Exercice 32 :

1) Démontrer que si n n'est pas multiple de 7, alors $(n^6 - 1)$ est multiple de 7 (n entier naturel).

a) Par récurrence.

b) En s'aidant d'un tableau de congruence.

2) Démontrer que $n(n^6 - 1)$ est un multiple de 7 pour tout entier n .

Comment choisir n pour que ce produit soit divisible par 84 ?

Exercice 33 :

En s'aidant d'un tableau de congruence, trouver les entiers naturels n tels que $n^3 - 3n^2 - 2$ soit divisible par 7.

Exercice 34 :

On considère le système de congruences

$$\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}; \text{ où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

1. Montrer que 11 est solution de (S).

2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, où k désigne un entier relatif.

Exercice 35 :

1) On considère l'ensemble $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

a) Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \pmod{7}$.

b) Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$.

c) Si a est un élément de A_7 , montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble $A_p = \{1; 2; \dots; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p .

Soit a un élément de A_p .

a) Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod{p}$.

b) On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p . Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p , de l'équation : $ax \equiv 1 \pmod{p}$.

c) Soient x et y deux entiers relatifs.

Démontrer que $xy \equiv 0 \pmod{p}$ si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p .

d) Application : $p = 31$. Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1 \pmod{31}$ et $3x \equiv 1 \pmod{31}$.

À l'aide des résultats précédents, résoudre dans Z l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$.

Exercice 36

Les quatre questions sont indépendantes.

1° Résoudre dans Z , l'équation $x^2 + x \equiv 5 \pmod{7}$

2° a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $7^{2n} \equiv 1 \pmod{8}$

b) En déduire le reste modulo 8 de 2009^{2010}

3° Déterminer les entiers naturels n tels que $27 \equiv 5 \pmod{n}$

4° Soit n un entier naturel non nul,

$$x = 2^n + 1 \text{ et } y = 2^{n+1} - 3$$

Soit d un entier naturel qui divise x et y .

a) Montrer que $d = 1$ ou $d = 5$

b) Donner, suivant les valeurs de n , le reste modulo 5 de 2^n .

Exercice 37 :

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , les restes possibles modulo 7 de 2^n .

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

3) Quel est le reste modulo 7 de 1773^{704}

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $3 \cdot 11^{n+1} + 5^{2n+4} \equiv 0 \pmod{7}$.