

Exercice 1

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{x^4 \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} \right)} \cdot \sqrt[3]{(x^3) \left(1 - \frac{1}{x^3} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sqrt[4]{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \varphi &= S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_3} ; \Delta_1 \parallel \Delta_2 \parallel \Delta_3 \\ &= \underset{2I\vec{3}}{t} \circ S_{\Delta_3} \circ \begin{cases} I \in \Delta_2 \\ J = p_1^{-1}(I) \end{cases} \\ &= S_{\Delta_1'} \circ S_{\Delta_3} \circ S_{\Delta_3} ; (IJ) \perp \Delta_3 \\ &= S_{\Delta_1'} ; \Delta_1' = \underset{I\vec{J}}{t}(\Delta_3) \\ &= \varphi^{-1} \end{aligned}$$

- $\textcircled{3}$
- * $\mathcal{C}_2$ est au dessus de (non) sur $[-1, 1]$
 - * $\mathcal{C}_2$ est en dessous de (non) sur $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$
- Alors $\mathcal{C}_2$ s't la représentation de f'
 $\mathcal{C}_1$ est celle de f .
 $\mathcal{C}_3$ est celle de F .

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad g(x) &= f(x) + c \\ &= \varphi \circ f(x) \text{ où } \varphi(x) = x + c \\ \begin{cases} \bullet f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R} \\ \bullet \varphi \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases} \\ \Rightarrow g \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R} \\ \text{et } g^{-1}(x) &= f^{-1} \circ \varphi^{-1}(x) \\ &= f^{-1}(\varphi^{-1}(x)) \\ &= f^{-1}(x - c) \end{aligned}$$

C.C.P.

Qu	1	2	3	4
Ré	c	a et c	b	c

Exercice 2

a) a) Derivabilité de f en 2^+

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{1 - \sin \frac{\pi}{x}}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\cos(\frac{\pi}{x})}{x - 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \frac{\pi}{x}}} \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

ccl: g est dérivable en 2^+ b) Variations et Représentation de f

$$\begin{aligned} \bullet x &\longrightarrow 1 - \sin \frac{\pi}{x} \text{ est d' } \mathbb{R} [2; +\infty[\\ \bullet \forall x \geq 2; \quad 1 - \sin \frac{\pi}{x} &> 0 \end{aligned}$$

 $\Rightarrow f$ est dérivable sur $]2; +\infty[$

$$\text{et } f'(x) = \frac{\frac{\pi}{x^2} \cos(\frac{\pi}{x})}{2\sqrt{1 - \sin \frac{\pi}{x}}}$$

$$= \frac{\pi}{2x^2} \frac{\sqrt{1 - \sin \frac{\pi}{x}} \cdot \sqrt{1 + \sin \frac{\pi}{x}}}{\sqrt{1 - \sin \frac{\pi}{x}}}$$

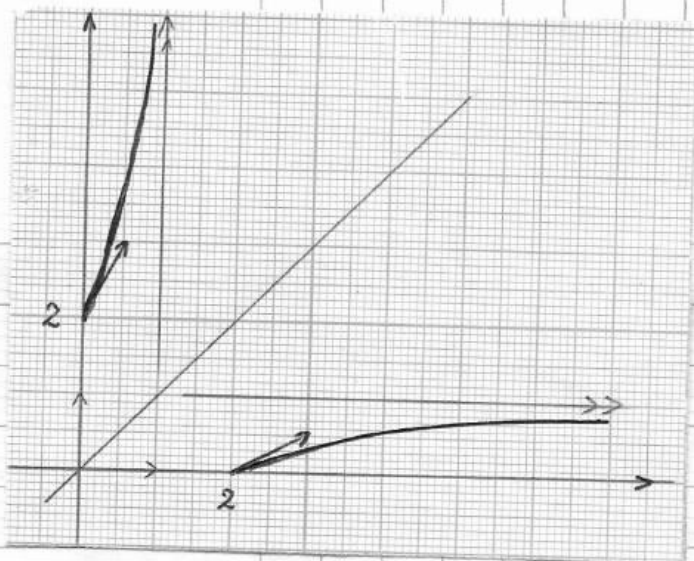
$$= \frac{\pi}{2x^2} \sqrt{1 + \sin \frac{\pi}{x}} ; x \geq 2$$

$f'(x)$	+
$f(x)$	0 $\longrightarrow$ 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ? \quad x > 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{x} \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sin x &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \sin(\frac{\pi}{x})) = 1$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$$



2) a) Bijectivité de f.

- f continue sur $[2; +\infty[$
 - f strictement croissante sur $[2; +\infty[$
- Alors f réalise une bij de $[2; +\infty[$ sur $[0, 1[$ par suite f admet une fonction réciproque g définie sur $[0, 1[$

b) Courbe de g

$$x' = f'(x), \Delta: y = x.$$

3) a) Calcul de $g'(\frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\begin{aligned} g'(\frac{\sqrt{2}}{2}) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}))} \\ &= \frac{1}{f'(6)} \quad \text{car } f(6) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot 72}{\pi \sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{6}}{\pi} \end{aligned}$$

b) * Dérivabilité de $\frac{1}{g}$.

- f est dérivable sur $[2; +\infty[$
- $\forall y \geq 2; f'(y) \neq 0$
- f est une bij de $[2; +\infty[$ sur $[0, 1[$

$\Rightarrow g$ est dérivable sur $[0, 1[$

de plus $\forall x \in [0, 1[; g(x) \in [2; +\infty[$

$$\Rightarrow g(x) \neq 0$$

Donc $\frac{1}{g}$ est dérivable sur $[0, 1[$

cc/ $\frac{1}{g}$ est dérivable sur $[0, 1[$

(2)

* Calcul de $(\frac{1}{g})'(x); x \in [0, 1[$

$$\begin{aligned} (\frac{1}{g})'(x) &= \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}; x = f(y) \\ &= -\frac{1}{y^2 \cdot f'(y)} \\ &= -\frac{1}{y^2 \cdot \frac{\pi}{2y^2} \sqrt{1 + \sin \frac{\pi}{y}}} \\ &= -\frac{2}{\pi \sqrt{1 + \sin \frac{\pi}{y}}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } x = \sqrt{1 - \sin \frac{\pi}{y}}$$

$$x^2 = 1 - \sin \frac{\pi}{y}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{y} = 1 - x^2$$

$$\text{Donc } (\frac{1}{g})'(x) = \frac{-2}{\pi \sqrt{2 - x^2}}$$

$$\text{cc/ } (\frac{1}{g})'(x) = \frac{-2}{\pi \sqrt{2 - x^2}}$$

4) a) $\frac{n+1}{n} g(\frac{1}{2n}) \leq u_n \leq \frac{n+1}{n} g(\frac{1}{n})$

$$0 \leq k \leq n$$

$$\Rightarrow n \leq n+k \leq 2n$$

or g est croissante.

$$\Rightarrow g(\frac{1}{2n}) \leq g(\frac{1}{n+k}) \leq g(\frac{1}{n})$$

$$\Rightarrow (n+1)g(\frac{1}{2n}) \leq n u_n \leq (n+1)g(\frac{1}{n})$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{n} g(\frac{1}{2n}) \leq u_n \leq \frac{n+1}{n} g(\frac{1}{n})$$

b) Convergence de (u_n)

$$\begin{aligned} &\frac{n+1}{n} g(\frac{1}{2n}) \leq u_n \leq \frac{n+1}{n} g(\frac{1}{n}) \\ &\left. \begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \\ &\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 \end{aligned} \right\} \lim_{n \rightarrow \infty} g(\frac{1}{n}) = 2 \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$.

5) a) Est-ce une fonction impaire.

On pose $\varphi(x) = H(x) + H(-x)$

• φ est dérivable sur $[-1, 1]$

• $\varphi'(x) = h(x) - h(-x)$
 $= 0$ car h est paire

Alors $\varphi(x) = \varphi(0) = 2H(0) = 0$

d'où $H(-x) = -H(x)$

ccl H est une fonction impaire

b) Expression de $H(x)$ en fait de $g(x)$

• $h(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} \right)'(x)$

$\Rightarrow H(x) = -\frac{1}{2g(x)} + C$

(R) $H(0) = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{4}$ ($g(0)=2$)

$\Rightarrow H(x) = -\frac{1}{2g(x)} + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 4H(x) = -\frac{2}{g(x)} + 1$

$\Rightarrow 1 - 4H(x) = \frac{2}{g(x)}$ AR

c) Variations de H et H'

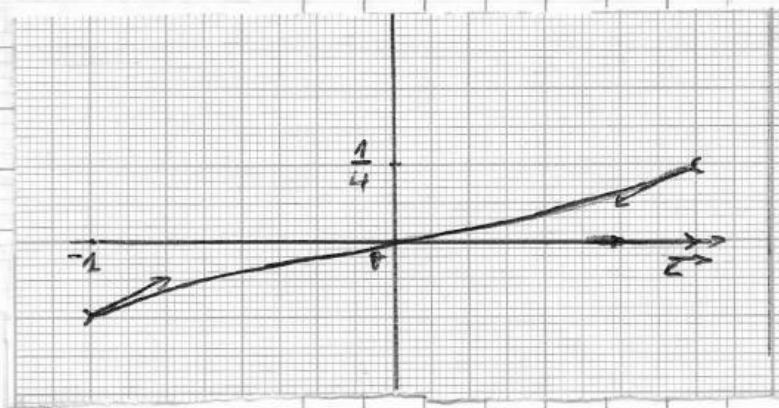
• $H'(x) = h(x) > 0$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2g(x)} \right)$
 $= \frac{1}{4}$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

• $H(0) = 0$

Donc

x	0		4
$H'(x)$		+	
$H(x)$	0		$\frac{1}{4}$



Exercice 3

1) a) La valeur de $f(0)$.

• $f(2x) = 2f(x), x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(0) = 2f(0)$

$\Rightarrow f(0) = 0$

b) $f'(2x) = f'(x), x \in \mathbb{R}?$

• $f(2x) = 2f(x)$

$\Rightarrow (f(2x))' = (2f(x))'$

$\Rightarrow 2f'(2x) = 2f'(x)$

$\Rightarrow f'(2x) = f'(x)$

(car $x \mapsto 2x$ est $\neq \pi/2$)
 • f est $\neq \pi/2$)

2) a) Monotonie de (u_n)

$u_n = f'\left(\frac{x}{2^n}\right)$

$= f'\left(2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}}\right)$

$= f'\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$

$= u_{n+1}$

ccl (u_n) est constante

b) Déduisons que $f'(x) = f'(0)$

• $u_n = u_0 = f'(x)$

• $u_0 = \lim u_n$

$= \lim f'\left(\frac{x}{2^n}\right)$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ } $\lim f'\left(\frac{x}{2^n}\right)$
 car f' continue en 0 } $= f'(0)$
 car f est 2 fois dér.

$\Rightarrow u_0 = f'(0)$

ccl $f'(0) = f'(x)$

③

3) Détermination de fct f sol de ①

$$f'(x) = f'(0) \\ \Rightarrow f(x) = x f'(0) + c$$

$$(A) \quad f(0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x f'(0)$$

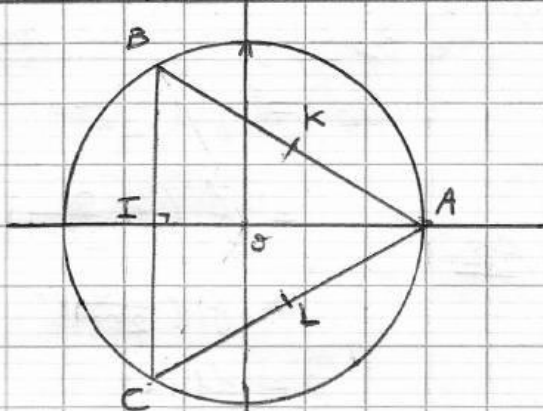
ccl. Les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient (1) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$

$$\text{par } f(x) = ax; a \in \mathbb{R}$$

$$\text{car: } f(2x) = 2f(x); f(0) = 0; a = f'(0)$$

Exercice 4

1) Placement des pts A(1), B(j), C(j²)



b) Nature de ABC

$$\frac{z_{AC}}{z_{AB}} = \frac{j^2 - 1}{j - 1} = j + 1 \\ = \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \\ = e^{j \frac{\pi}{3}}$$

Alors ABC est Équilatéral

de plus OA = OB = OC = 1

ccl. ABC est Équilatéral de centre O

2) Nature et caractéristique de f

$$f: B \rightarrow C \\ K \rightarrow I$$

$$* \text{med}[BC] \neq \text{med}[KI]$$

$\Rightarrow$ fct non symétrique glissante

$$* \text{Poson } f^{-1} = t_{\vec{u}} \circ S_{\vec{v}}; \vec{u} \in \mathbb{R}^2$$

$$f^{-1}(C) = B \Rightarrow C * B = I \in D$$

$$f^{-1}(I) = K \Rightarrow K = t_{\vec{u}}(I)$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{IK} \text{ et } \Delta = (IK)$$

$$\Rightarrow f^{-1} = t_{\vec{IK}} \circ S_{\vec{IK}}$$

$$\Rightarrow f = S_{\vec{IK}} \circ t_{\vec{KI}}$$

$$\text{ccl. } f = S_{\vec{IK}} \circ t_{\vec{KI}}$$

b) Caractéristique de φ

$$\varphi = f^{-1} \circ S_{AC} \\ = t_{\vec{IK}} \circ S_{\vec{IK}} \circ S_{AC} \\ = t_{\vec{IK}} \circ t_{\vec{LB}} \\ = t_{\vec{CB}}$$

$$3) M_2 = r^2(M_1), M_3 = r(M_1)$$

$$\begin{cases} M_2 = S_2(M) \\ M_1 = S_1(M) \Rightarrow M = S_1(M_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_2 = S_2 \circ S_1(M_1)$$

$$= r(0, \frac{4\pi}{3})(M_1)$$

$$= r^2(M_1)$$

$$\begin{cases} M_3 = S_3(M) \\ M_1 = S_1(M) \Rightarrow M = S_1(M_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_3 = S_3 \circ S_1(M_1)$$

$$= r(0, -\frac{4\pi}{3})(M_1)$$

$$= r(0, \frac{2\pi}{3})(M_1)$$

$$= r(M_1)$$

④

b) $M_1 M_2 M_3$ est équilatéral.

$$M_3 = r(M_1)$$

$$M_2 = r^2(M_1) \Rightarrow M_1 = (r^2)^{-1}(M_2) = r(0, -\frac{4\pi}{3})(M_2)$$

$$\Rightarrow M_1 = r(M_2)$$

$$M_2 = S_2(M)$$

$$M_3 = S_3(M) \Rightarrow M = S_3(M_3)$$

$$\Rightarrow M_2 = S_2 \circ S_3(M_3) = r(M_3)$$

$$\text{donc } \left. \begin{array}{l} M_3 = r(M_1) \\ M_2 = r(M_3) \\ M_1 = r(M_2) \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 M_3 = M_2 M_3 = M_1 M_2$$

ccf: $M_1 M_2 M_3$ est équilatéral.

4) Affixes de M_1, M_3 et M_2 .

$$M_1 = S_1(M); S_1 = S_{OA}$$

$$\Rightarrow z_1 = \bar{z}$$

$$M_2 = r^2(M_1); r^2: z' = e^{i\frac{4\pi}{3}} z = j^2 \bar{z}$$

$$\Rightarrow z_2 = j^2 z_1 = j^2 \bar{z}$$

$$M_3 = r(M_1); r: z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z = j \bar{z}$$

$$\Rightarrow z_3 = j z_1 = j \bar{z}$$

$$\text{ccf: } z_1 = \bar{z}; z_2 = j^2 \bar{z}; z_3 = j \bar{z}$$

5) a) I est le milieu de $M_1 M_4$

$$M_4 = S_{BC}(M)$$

$$= S_{BC} \circ S_{OA}(M_1); M_1 = S_{OA}(M)$$

$$= S_I(M_1); (BC) \perp (OA) \text{ en I}$$

$$\text{ccf: } I = M_1 M_4$$

b) Affixe z de M_4

$$z + \bar{z} = 2 \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow z = -1 - \bar{z}$$

6) a) M_2, M_3, M_4 alignés

$$M_2, M_3, M_4 \text{ alignés} \Leftrightarrow \frac{z_{M_3 M_4}}{z_{M_2 M_3}} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 - \bar{z} - j \bar{z}}{j^2 \bar{z} - j \bar{z}} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 - \bar{z}(1+j)}{j^2 \bar{z} - j \bar{z}} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 + j^2 \bar{z}}{j^2 \bar{z} - j \bar{z}} \in \mathbb{R}$$

b) Ensemble des pts M tels que M_2, M_3, M_4 alignés

$$M_2, M_3, M_4 \text{ alignés} \Leftrightarrow \frac{-1 + j^2 \bar{z}}{j^2 \bar{z} - j \bar{z}} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 + j^2 \bar{z}}{j \bar{z}(j-1)} \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} j-1 = -\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \\ j(j-1) = -i\sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 + j^2 \bar{z}}{-i\sqrt{3} \bar{z}} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (-1 + j^2 \bar{z}) \bar{z} = -(-1 + j \bar{z}) \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow -\bar{z} \bar{z} - (3 + \bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$$

ccf: L'ensemble des pts M est $\mathcal{C}_{(A', 1)}$ privé du pt O

⑤

The END