

b) Dédire que la suite u est convergente.

5) Soit h la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $h(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2-x^2}}$ et H la primitive de h sur $[-1, 1]$ qui s'annule en 0.

a) Prouver que H est une fonction impaire.

b) Montrer que pour tout x de $[0, 1[$ on a : $1 - 4H(x) = \frac{2}{g(x)}$

c) Etudier les variations de H puis construire sa courbe dans un repère orthonormé R' .

Exercice 3: (4 points)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel x : $f(2x) = 2f(x)$ (1)

1) a) Déterminer la valeur de $f(0)$

b) Démontrer que $f'(2x) = f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$

2) Pour x réel fixé, on désigne par (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = f'(\frac{x}{2^n})$

a) Montrer que la suite (u_n) est constante.

b) En déduire que pour tout réel x , $f'(x) = f'(0)$

3) Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation (1)

Exercice 4: (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a) Placer les points $A(1)$, $B(j)$ et $C(j^2)$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) Montrer que ABC est un triangle équilatéral de centre O .

2) Désignons par $I = B \cdot C$, $K = B \cdot A$ et $L = A \cdot C$

a) Caractériser l'antidépacement f qui envoie B en C et K en I

b) Définir la transformation $\varphi = f^{-1} \circ S_{AC}$

3) On désigne par s_1 , s_2 et s_3 les symétries orthogonales respectivement par rapport aux droites (OA) , (OB) et (OC) et par r la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Soit M un point du plan, $M_1 = s_1(M)$, $M_2 = s_2(M)$, $M_3 = s_3(M)$.

a) Montrer que $M_2 = r^2(M_1)$ et $M_3 = r(M_1)$ (où r^2 désigne $r \circ r$).

b) Prouver que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral lorsque M est distinct de O .

4) Soit M un point quelconque du plan P , d'affixe z non nul.

Montrer que les points M_1 , M_2 et M_3 ont pour affixes respectives $\bar{z}$, $j^2\bar{z}$ et $j\bar{z}$.

5) Soit M_4 le symétrique de M par rapport à la droite (BC) .

a) Montrer que le point I est le milieu du segment $[M_1M_4]$.

b) En déduire que l'affixe de M_4 est $Z = -1 - \bar{z}$

6) a) Montrer que les points M_2 , M_3 et M_4 sont alignés si et seulement si $\frac{-1+j^2\bar{z}}{j^2\bar{z}-j\bar{z}}$ est réel.

b) Dédire l'ensemble des points M tels que les points M_2 , M_3 et M_4 sont alignés.

(On rappelle que : $1 + j + j^2 = 0$, $j^2 = \bar{j}$ et $j^3 = 1$)