

Exercice 1:

Dans chacune des questions suivantes, au moins une des réponses est exacte.

1) ABC est un triangle équilatéral direct de centre O.

$R(C, \frac{\pi}{3}) \circ S_{(CO)}$ est :

a) $S_{(AC)}$; b) $S_{(OC)}$; c) $S_{(BC)}$ d) $r(A, \frac{\pi}{3})$

2) Une isométrie qui échange deux points distincts A et B :

a) Fixe tout point de (AB) ; b) Fixe le milieu de [AB]
c) Est une symétrie centrale
d) Est une symétrie orthogonale.

3) Une isométrie qui laisse invariants deux points A et B :

a) est l'identité ; b) fixe le milieu de [AB]
c) laisse invariante la droite (AB)
d) laisse invariante la médiatrice de [AB]
e) est la symétrie de centre le milieu de [AB]

Exercice 2:

Soit ABCD un carré direct de centre O.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1°) Justifier l'existence et l'unicité d'un déplacement f qui transforme B en K et L en A.

Déterminer la nature et l'angle de f.

2°) a) Déterminer les images par f des droites (AB) et (AD), en déduire f(A) et f(I).

b) En déduire le centre de f.

3) Caractériser chacune des transformations :

$$f = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}, \quad f = S_{(BC)} \circ S_{(OI)}, \quad f = r_{(C, -\frac{\pi}{2})} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}$$

$$f = r_{(A, \frac{\pi}{2})} \circ t_{\vec{CB}}, \quad f = S_{(AC)} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}, \quad f = S_{(IK)} \circ t_{\vec{BD}}$$

Exercice 3:

IJK est un triangle équilatéral direct. $O = J * K$

Soit $R = r(J, \frac{\pi}{3})$, on pose $f = t_{\vec{JK}} \circ R$ et $g = S_O \circ R$

a) Déterminer f(J) puis donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Déterminer g(J). Montrer que g est une rotation, préciser son angle.

c) Reconnaître l'application $f \circ g^{-1}$.

d) Pour tout point M du plan, distinct de K, on pose $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$

Montrer que $(M_1 M_2)$ passe par un point fixe.

Exercice 4 :

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct.

On désigne par $I = A * B$ et $J = A * C$.

1°) Montrer qu'il existe un unique déplacement f

qui envoie A sur C et I sur J.

Donner les éléments caractéristiques de f.

2°) Définir l'antidépacement g qui envoie C en A et A en B.

3°) Caractériser les applications fog et gof.

Exercice 5:

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC

tels que $AC = 2AB$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. $I = A * C$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ qui transforme A en I et B en C.

b) Montrer que φ est une rotation dont on précisera l'angle. Construire son centre Ω .

2) Soient R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et

$$g = \varphi \circ R^{-1}.$$

a) Déterminer g(A) puis caractériser l'application g.

b) En déduire que : $\varphi = t_{\vec{AI}} \circ R$.

3) Soit $E = R(I)$ et F le point tel que AEFI est un carré.

a) Caractériser l'application $\varphi \circ \varphi$

b) Déterminer $(\varphi \circ \varphi)(A)$.

En déduire que : $\Omega = A * F$.

Exercice 6:

Dans le plan orienté, on considère le losange ABCD

de centre O et tel que $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Le cercle de centre B et de rayon AB recoupe la droite (BD) en I.

1) a) Justifier l'existence d'un déplacement unique φ qui envoie A en C et B en D.

b) Caractériser f.

2) a) Donner la nature de $g = r_{(D, \frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{BD}} \circ r_{(A, \frac{\pi}{3})}$

b) Déterminer g(D), caractériser alors g

3) Soit $f = r_{(B, -\frac{2\pi}{3})} \circ r_{(A, \frac{\pi}{3})}$

a) Donner la nature de f.

b) Caractériser f.

4) Déterminer et caractériser les isométries suivantes : $h = S_{(AI)} \circ S_{(BD)} \circ \varphi$ et $k = f \circ t_{\vec{CB}}$

Exercice 7:

Soit AFED un carré tel que $(\vec{AF}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et

soit O son centre. On désigne par B et I les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (EF).

1)Caractériser le déplacement r qui envoie F en E et E en D .

2)Soient $f = r \circ S_{(O)}$ et $g = t_{\vec{OI}} \circ r^{-1}$

a)Donner la nature et les éléments caractéristiques de f

b)Mque g est une rotation dont on précisera l'angle.

c)Déterminer $g(O)$. En déduire le centre de g .

3)Soit h l'antidéplacement défini par

$h(D) = F$ et $h(O) = I$

a)Mque h est une symétrie glissante.

b)Donner la forme réduite de h .

4)Soit M un point de plan P .

a)Mque $h(M)=g(M) \Leftrightarrow f(M)=M$

b)En déduire l'ensemble des points M tels que $h(M)=g(M)$

Exercice 8:

Dans un plan orienté, on considère un triangle

rectangle en B et tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

On désigne par O le milieu de $[AC]$ et par $J = B * C$

1)Mqu'il existe un unique déplacement R tel que $R(A) = O$ et $R(B)=C$

2)a)Montrer que R est une rotation puis construire son centre D .

b)Donner la nature du quadrilatère $ABOD$

3)On désigne par $R_C = r(C, \frac{\pi}{3})$, $R_B = r(B, \frac{\pi}{3})$

et $T = t_{\vec{BC}}$. On pose $f = R_C \circ T \circ R_B$.

a)Déterminer $f(B)$.

b)En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

4)On désigne par I le milieu de $[OA]$ et par K le milieu de $[AB]$, Soit φ l'antidéplacement qui transforme B en A et A en O .

a)Montrer que φ est une symétrie glissante puis déterminer ses éléments caractéristiques.

b)Montrer que $\varphi(O)=D$

c)Soit $E = \varphi(D)$, montrer que E et B sont symétriques par rapport à O .

Exercice 9:

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que

$(\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et soit r la rotation de centre A et

d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soient $D = r(C)$ et $E = r^{-1}(B)$, $I = C * D$

1)a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = D$ et $f(C) = A$

b)Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f .

2)Soit $g = f \circ r$

a)Montrer que g est une translation

b)Soit $F=g(E)$, montrer que $f(B) = F$ et en déduire la nature du triangle BIF .

c)Montrer que les points C , A et F sont alignés.

3)Soit $G = t_{\vec{AD}}(I)$

a)Mqu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(C) = D$ et $\varphi(I) = G$

b)Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

Exercice 10 :

Soit C le cercle de centre O et de diamètre $[BC]$

$\vec{BA}, \vec{BC} = \frac{\pi}{3}(2\pi)$

1)a)Montrer qu'il existe un unique déplacement φ telle que $\varphi(A)=C$ et $\varphi(B)=O$

b)Montrer que φ est une rotation.

c)Soit I le centre de φ

Montrer que I est un point du cercle C puis construire I .

2)Soit g l'antidéplacement telle que $g(C)=B$ et $g(O)=A$

a)Montrer que g n'a pas des points fixes.

b)Déduire la nature et les éléments caractéristiques de g .

c)Soit $f = \varphi \circ g$, montrer que f est une symétrie orthogonale que l'on précisera.

3)Soit M le point tel que $OICM$ est un parallélogramme et $D = \varphi(C)$. On pose $h = \varphi \circ r$,

où r est la rotation de centre D et d'angle $\frac{-\pi}{3}$

a)Déterminer $h(C)$

b)Caractériser h

c)Déterminer $h(M)$.

En déduire que MBD est un triangle équilatéral.

Exercice 11:

Dans le plan orienté, $ABCD$ est un parallélogramme de centre I et les triangles ABO_1 , BCO_2 , CDO_3 et DAO_4 sont des triangles rectangles isocèles directs de sommets principaux respectifs O_1 , O_2 , O_3 et O_4 . Voir la figure ci-contre.

On désigne par R_1 , R_2 , R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs O_1 , O_2 , O_3 et O_4

1)a) Déterminer $R_2 \circ R_1(A)$; $R_3 \circ R_2(B)$ et $R_4 \circ R_3(C)$

b) Montrer que les isométries suivantes $R_2 \circ R_1$, $R_3 \circ R_2$ et $R_4 \circ R_3$

sont égales à une même isométrie f que l'on précisera

2a) Montrer que $R_3 \circ R_2(O_1) = R_2(O_1)$,
dédire alors $f(O_1)$

b) Montrer que $f(O_2) = O_4$

c) M que le quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$ est un carré.

Exercice 12:

Soit ABC un triangle équilatéral direct et H le milieu de [BC].

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon AB coupe la demi-droite [HA) en un point I.

On note J le symétrique de I par rapport à (AC).

1) Montrer que $(\vec{BI}, \vec{CJ}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

2) Montrer qu'il existe un seul déplacement f qui transforme B en C et I en J.

b) M que f est une rotation que l'on caractérisera.

3) Caractériser f o $S_{(AI)}$.

4) La droite (AC) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en D.

On pose $g = S_{(AI)} \circ S_{(BD)}$

a) M que g est une translation dont on donnera le vecteur.

b) Caractériser l'isométrie f o g.

c) Soit K l'antécédent de J par f o g. Montrer que BCIK est un parallélogramme.

Exercice 13 :

ABC est un triangle équilatéral direct.

$\Omega = S_{(AC)}(B)$ et $I = A^*C$

1) Soit r la rotation d'angle $\pi/3$ et telle que $r(A) = C$

a) Déterminer le centre de r ;

b) Construire $B' = r(B)$; déduire que $C = A^*B'$

2) On pose $\varphi = S_{(AB)} \circ r$

a) Montrer que φ est une symétrie glissante.

b) Donner la forme réduite de φ

3) Soit $J = B^*B'$ et g l'antidépacement tel que

$g(A) = C$ et $g(B) = B'$

a) M que g est une symétrie glissante.

b) Construire $I' = g(I)$

c) Déduire la forme réduite de g

Exercice 14

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD de centre O et tel que $AB = 2 AD$.

Soient I, J et F les points définies par :

$I = A^*B$; $J = D^*C$ et $C = B^*F$

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement S qui envoie A en C et I en J

b) Caractériser S

2) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [AB] et $\mathcal{C}'$ le cercle de diamètre [CD].

(BD) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en M et recoupe le cercle $\mathcal{C}'$ en N ; on pose $M' = S_{(IJ)}(M)$

a) Montrer que $N = S(M)$

b) Dédire que les droites (M'N) et (BC) sont parallèles.

3) a) Montrer qu'il existe une seule isométrie f vérifiant $f(A) = C$, $f(I) = J$ et $f(D) = F$

b) Montrer que f est antidépacement.

c) Déterminer f(B).

d) Dédire la nature et les éléments caractéristiques de f.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g = f \circ S_{(AD)}$

Exercice :15

Le plan P est orienté dans le sens direct.

On considère un hexagone régulier ABCDEF de sens direct et de centre O.

1/ Soit f une isométrie de P qui vérifie $f(A) = O$ et $f(B) = D$

a- On pose $g = f \circ t_{\vec{OA}}$. Déterminer $g(O)$ et $g(C)$

b- En déduire qu'il existe exactement deux isométries f qui vérifient $f(A) = O$ et $f(B) = D$

c- Déterminer l'image de O par chacune de ces isométries.

2/ Soit $\varphi = R_{(O, \frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{AD}}$ et soit Δ la médiatrice du segment [BC].

Déterminer les droites D_1 et D_2 telles que $R_{(O, \frac{\pi}{3})} = S_{D_1} \circ S_{\Delta}$ et $t_{\vec{AD}} = S_{\Delta} \circ S_{D_2}$

Caractériser alors φ .

3/ Soit $\psi = S_{(OI)} \circ t_{\vec{AD}}$ où J est le milieu du segment [CD]

Déterminer l'image de la droite (EF) par la transformation ψ^{-1} .

4/ Soit $h = \varphi \circ \psi^{-1}$.

a- Déterminer $h(O)$ et $h(A)$, en déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.

b- Pour tout point M de P on note $M_1 = \varphi(M)$ et $M_2 = \psi(M)$.

Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels le quadrilatère FBM_1M_2 est un rectangle.

Exercice :16

Le plan P est orienté dans le sens direct.

On considère un triangle ABC rectangle en C, inscrit dans un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et tel que

$(\vec{AC}, \vec{AB}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$

On désigne par : I le milieu de [BC], D le symétrique de C par rapport à (AB) et E le symétrique de O par rapport à I.

1/ Montrer que [DE] est un diamètre de ($\mathcal{C}$) .

2) Soient $k = S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$ et $h = S_{(ED)} \circ S_{(OA)}$

a) Caractériser chacune des isométries k, h et $h \circ k^{-1}$

b- Déterminer l'image de la droite (BD) par k.

c- Soit M point du plan n'appartenant pas à la droite (BD). On pose $M' = k(M)$ et $M'' = h(M)$.

i) Montrer que le quadrilatère $BM'CM''$ est un parallélogramme.

ii) Où faut-il placer M pour que $BM'CM''$ soit un losange ?

3/ On se propose de déterminer les isométries f de P qui vérifient : $f(E) = A$ et $f(C) = D$

a) Soit g l'isométrie telle que $f = t_{\overrightarrow{EA}} \circ g$
Montrer que $g = R_{(E, \frac{-2\pi}{3})}$ ou $g = S_{(ED)}$

b) On suppose que $g = R_{(E, \frac{-2\pi}{3})}$
Déterminer les droites Δ et Δ' tels que
 $R_{(E, \frac{-2\pi}{3})} = S_{(ED)} \circ S_{\Delta}$ et $t_{\overrightarrow{EA}} = S_{\Delta'} \circ S_{(EB)}$

Caractériser alors f .

c) On suppose que $g = S_{(ED)}$
Montrer que f est une symétrie glissante.
(on pourra considérer le point H projeté orthogonal de A sur (ED))

Exercice 17:

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a) Placer les points $A(1)$, $B(j)$ et $C(j^2)$
où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) Montrer que ABC est un triangle équilatéral de centre O .

2) Désignons par $I = B \circ C$, $K = B \circ A$ et $L = A \circ C$

a) Caractériser l'antidéplacement f qui envoie B en C et K en I

b) Définir la transformation $\varphi = f^{-1} \circ S_{AC}$

3) On désigne par s_1 , s_2 et s_3 les symétries orthogonales respectivement par rapport aux droites (OA) , (OB) et (OC) et par r la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Soit M un point du plan, $M_1 = s_1(M)$, $M_2 = s_2(M)$, $M_3 = s_3(M)$.

a) Montrer que $M_2 = r^2(M_1)$ et $M_3 = r(M_1)$ (où r^2 désigne $r \circ r$).

b) Prouver que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral lorsque M est distinct de O .

4) Soit M un point quelconque du plan P , d'affixe z non nul.

Montrer que les points M_1 , M_2 et M_3 ont pour affixes respectives $\bar{z}$, $j^2\bar{z}$ et $j\bar{z}$.

5) Soit M_4 le symétrique de M par rapport à la droite (BC) .

a) Montrer que le point I est le milieu du segment $[M_1M_4]$.

b) En déduire que l'affixe de M_4 est $Z = -1 - \bar{z}$

6) a) Montrer que les points M_2 , M_3 et M_4 sont alignés si et seulement si $\frac{-1+j^2\bar{z}}{j^2\bar{z}-j\bar{z}}$ est réel.

b) Déduire l'ensemble des points M tels que les points M_2 , M_3 et M_4 sont alignés.

(On rappelle que : $1 + j + j^2 = 0$, $j^2 = \bar{j}$ et $j^3 = 1$)

Exercice 18:

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC , I le milieu du segment $[BC]$, J le milieu du segment $[AB]$ et L le milieu du segment $[AC]$

1°) Montrer que $OBAC$ est un losange.

2°) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(B) = A$.

a) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b) Montrer que $f = R_{(O, \frac{\pi}{3})} \circ S_{(AB)}$.

c) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de $R_{(O, \frac{\pi}{3})} \circ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

3°) Soit l'isométrie $\varphi = S_{(BC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.

a) Montrer que $S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = S_{(AO)} \circ S_{(AC)}$.

En déduire que $\varphi = S_{(IK)} \circ S_{(IJ)} \circ S_{(AC)}$ où K est le projeté orthogonal de I sur (AC) .

b) Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont précisera l'axe et le vecteur.

4°) Soit g une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le triangle ABC .

a) Montrer que g fixe le point O .

b) Montrer que $g([BC]) = [BC]$.

c) Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC .