

Madame, voulez-vous être le cercle dont je serais le centre,
la parabole dont je serais le foyer, l'ellipse dont je serais la directrice,
L'hyperbole dont je serais l'asymptote ?
En un mot, voulez-vous de moi pour époux ? (CHRISTOPHE)

2011/2012

Exercice1 :Q.CM

1) La parabole (P) : $y^2 = -2x + 1$

a) Son axe est l'axe des abscisses

b) Son sommet est $S(\frac{1}{2}, 0)$

c) Son foyer est $F(-\frac{1}{2}, 0)$

d) Sa directrice est $D : x = 1$

2) La parabole de foyer $F(2, 0)$ et de directrice $D : x = -4$ a pour équation :

a) $y^2 - 4 = 4x$ b) $x^2 = 8(y+1)$ c) $y^2 - 8 = 8x$

Exercice:2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les courbes :

$P_1 : y^2 = 8x$, $P_2 : x^2 = 4y$, $P_3 : y^2 = -6x$

$P_4 : \left| \frac{z + i\bar{z}}{2} \right| = \left| z - \frac{1}{2}(1+i) \right|$

$P_5 : y^2 + 2y - 6x + 10 = 0$,

$P_6 : x^2 - 4x + 2y - 2 = 0$;

Reconnaître la nature et caractériser chacune de ces courbes.

Exercice 3 :

Soit OAB un triangle isocèle et rectangle en O tel que $AB = 4$.

On note I le milieu de [AB] et F le point défini par :

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{4} \overrightarrow{OI}$$

Soit P la parabole de foyer F et de sommet O.

On munit le plan du repère orthonormé

$R(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OI}$

1) a) Mque dans R, P a pour équation : $y^2 = 2x$

b) Déterminer les coordonnées du point A ; En déduire que P passe par A et B

c) La tangente à P en A coupe (OI) en un point J. Montrer que O est le milieu de [IJ].

2) Soit $M(x_1, y_1)$ un point de P distinct de O.

La perpendiculaire à (OM) en O recoupe P en un point $N(x_2, y_2)$.

On pose que (MN) d'équation : $x = ay + b$.

a) Montrer que y_1 et y_2 sont les solutions de l'équation : $y^2 - 2ay - 2b = 0$.

b) En remarquant que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$,

montrer que $b = 2$.

c) En déduire que lorsque M varie sur P, (MN) passe par un point fixe.

Exercice 4:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ Soit (P_0) la parabole d'équation : $y^2 = 4x - 4$
a- Déterminer le foyer et la directrice de (P_0) puis tracer (P_0) .

b- Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la parabole (P_0) et la droite d'équation $x = 3$.

2/ Soit $F(a, b)$ un point du plan tels que $a > 0$ et soit (P) la parabole de foyer F et de directrice la droite des ordonnées.

a- Prouver qu'une équation de (P) est :

$$(y - b)^2 = 2ax - a^2$$

b- Montrer que (P) passe par le point $A(1, 0)$ si et seulement si F appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1 privé du point O.

c- Soit S le sommet de la parabole (P). Déterminer et construire l'ensemble des points S lorsque F décrit le cercle (C) privé de O.

d- Soient F_1 et F_2 deux points du cercle (C) privé de O et P_1 et P_2 les paraboles correspondantes.

Montrer que les tangentes en A aux paraboles P_1 et P_2 sont perpendiculaires si et seulement si F_1 et F_2 sont diamétralement opposés sur (C).

Exercice 5 (4,5 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit (P) la parabole de foyer O et de directrice la droite D d'équation : $x = -2$.

1/ a- Montrer qu'une équation cartésienne de (P) est : $y^2 = 4x + 4$

b- Tracer la parabole (P) , on désignera par S son sommet.

2/ Soit le point $A(-2, \frac{3}{2})$

a- Déterminer, par leurs équations, les tangentes à (P) issues de A.

On notera T_1 et T_2 ces tangentes, M_1 et M_2 leurs points de contact respectifs avec (P) .

b- Tracer T_1 et T_2 , montrer qu'elles sont perpendiculaires et que les points O, M_1 et M_2 sont alignés.

3/ Soit M un point de (P) d'affixe $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$

a- Prouver que : $\theta \neq 0[2\pi]$

b- Montrer que : $r = \frac{2}{1 - \cos\theta}$

Madame, voulez-vous être le cercle dont je serais le centre,
la parabole dont je serais le foyer, l'ellipse dont je serais la directrice,
L'hyperbole dont je serais l'asymptote ?
En un mot, voulez-vous de moi pour époux ? (CHRISTOPHE)

2011/2012

4/ Soit M un point de (P) distinct de S, la droite (OM) recoupe (P) en M'.
a- Déterminer la valeur minimale de la distance MM'.
b- Soient N et N' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' sur l'axe de (P).
Montrer que la valeur du produit MN.M'N' est une constante que l'on précisera.

Exercice 6:

1) L'hyperbole (H) : $4x^2 - y^2 = 1$

a) Son excentricité est $\frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $F(\sqrt{5}, 0)$ est un de ses foyers

c) La droite d'équation $y = 2x$ est une de ses asymptotes

d) La droite d'équation $y = 2\sqrt{5}$ est une des directrices

e) L'axe des abscisses est un axe de symétrie de (H)

3) L'ellipse (E) : $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

a) son axe focale est l'axe des abscisses

b) Son excentricité est $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $F(\sqrt{3}, 0)$ est un de ses foyers

d) La droite d'équation : $x = \frac{4\sqrt{3}}{2}$ est une de ses directrices

4) La courbe d'équation $x^2 - 4y^2 + 2x = 0$:

a) est une ellipse

b) est une hyperbole

c) a pour centre le point $\Omega(-1, 0)$

d) a pour axe focal la droite d'équation $y = -1$

e) a pour excentricité $\sqrt{5}$

Exercice 7:

Donner la nature des coniques d'équations suivantes :

a) $-2y + x^2 - 2x - 3 = 0$

b) $(x+2)y + x = 0$

c) $y^2 - 2y + x^2 + 2x + 5 = 0$

d) $-2y^2 - 2y + x^2 + 2x - 1 = 0$

Exercice 8:

Définir l'ensemble des points M(z) vérifiant :

$$Z\bar{Z} + 3(Z^2 + \bar{Z}^2) = 1$$

Exercice 6:

On désigne par (H) et (E) les ensemble des points M dont les coordonnées (x,y) vérifient :

$$(H) : 4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 113 = 0$$

$$(E) : 16x^2 + 9y^2 + 32x - 54y - 47 = 0$$

1) Déterminer les équations réduites de (H) et (E) ; déduire-en la nature de ces courbes.

2) Déterminer les éléments caractéristiques des ces deux courbes.

3) Dessiner-les sur le même graphique.

Exercice 7:

ABCD un carré indirect. A tout point du plan, on associe son projeté orthogonale H sur (BD) dans la direction de (AD).

on note : $E = \{M \in P ; 2MA^2 = MH^2\}$

1) Déterminer en utilisant que des arguments géométriques (ie: non analytiques), l'ensemble E. (on pourra introduire H' le projeté orthogonale de M sur (BD).

2) Déterminer une équation cartésienne de E dans le repère (A, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$)

3) Donner une équation réduite de E

Exercice 8:

Démontrer que l'ensemble (C) des points M, d'affixe z tels que :

$$|z + 2\bar{z} + 1| = \sqrt{3}|z + \bar{z}| \text{ est une conique.}$$

2) Déterminer la nature de (C). Précisez ses éléments remarquables : foyers, asymptotes, directrices. Tracez (C) en mettant en évidence les éléments précédant.

Exercice 9:

A tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe Z tel que : $Z = z^2 - (9-2i)z + 26$. Soit M l'image de z dans le plan complexe.

1) Déterminer l'ensemble (Γ_1) des points M tels que Z soit réel. Précisez sa nature et ses éléments remarquables.

2) Déterminer l'ensemble (Γ_2) des points M tel que Z soit nul ou imaginaire pur.

3) Dessinez (Γ_1) et (Γ_2) sur le même graphique. Précisez les coordonnées de leurs points d'intersection.

Exercice 10 :

Soit u un nombre complexe et (E_u) l'équation : $z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2i u \cdot \bar{u} = 0$

1°) Résoudre l'équation (E_u) dans IC

On désignera par z' et z'' les solutions de cette équation.

2°) On rapporte le plan au repère orthonormé $\rightarrow \rightarrow$

direct (o, e_1, e_2) et on désigne par A(2i) M(u), M'(z') et M''(z'').

Soit (H) l'ensemble des points M tels que les points A, M' et M'' sont alignés.

a) Trouver une équation cartésienne de (H).

Madame, voulez-vous être le cercle dont je serais le centre,
la parabole dont je serais le foyer, l'ellipse dont je serais la directrice,
L'hyperbole dont je serais l'asymptote ?
En un mot, voulez-vous de moi pour époux ? (CHRISTOPHE)

2011/2012

b) Montrer que l'ensemble (H) est une hyperbole dont on précisera le centre les sommets , les foyers et les asymptotes .

c) Vérifier que (H) passe par le point O et donner une équation cartésienne de la tangente à (H) en O. Tracer (H). (TN 98)

Exercice 11:

R(O, i, j), étant un repère orthonormé du plan.

A tout réel m on associe la courbe

$$C_m : x^2 - 2mx + my^2 = 0$$

1) Déterminer, suivant les valeurs de m, la nature de la courbe C_m .

2) Dans cette question $m \in]0, 1[$

a) Donner dans le repère R les coordonnées des foyers du conique C_m et ceux des sommets de son axe focal

b) Déterminer l'ensemble (C) des foyers de C_m quand m varie.

c) Déterminer et caractériser l'ensemble (S) des sommets de l'axe focal de C_m .

Exercice 12:

A tout points M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z tel que : $Z = (3+2i)z + 3i\bar{z} - 1$.

1) Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M tels que O, M et M' soient alignés est une conique.

2) Déterminer la nature de (Γ). Préciser ses éléments remarquables. Tracer (Γ) en mettant en évidence les éléments précédents.

Exercice 14:

Soit α un nombre réel de $]0 ; \pi[$.

1) Résoudre l'équation d'inconnue complexe z , notée (E) : $\sin^2 \alpha z^2 - 4z \sin \alpha + 4 + \cos^2 \alpha = 0$.

2) Soit M' et M'' les images des solutions (E) dans le plan complexe.

a) Déterminer que, lorsque α décrit $]0 ; \pi[$, l'ensemble des points M' et M'' est une branche d'une hyperbole (H).

b) Préciser les sommets, les foyers, les asymptotes de (H).

Dessiner (H) en mettant en évidence les éléments précédents.

Exercice 15 :

Le plan (P) est rapporté à un repère

orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par m un nombre réel et par (E_m) l'ensemble des points M du plan (P), de coordonnées (x,y) vérifiant l'équation : $(m-1)x^2 + 3my^2 + 2(m-1)x + m + 3 = 0$.

1) Déterminer (E_m) pour les valeurs particulières $m=0$ et $m=1$.

2) Pour quelle valeur de m l'ensemble (E_m) est-il un cercle ? Préciser dans ce cas son centre et son rayon.

3) Dans cette question , m est un réel non nul et différent de 1. Soit O' le point de coordonnées (-1,0). On notera (X,Y) les coordonnées de M

dans le repère $(o', \vec{i}, \vec{j})$. $(m-1)X^2 + 3mY^2 + 4 = 0$.

b) Dédire-en, en fonction de m la nature de (E_m)

Exercice 16 :

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé

$(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite (D) d'équation $x=1$ et le point F(3,0). Soit H le projeté orthogonal d'un point M(x,y) (D).

1) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $MF = \sqrt{3}MH$.

2) Déterminer les sommets, les foyers et les asymptotes de (Γ).

Dessiner (Γ).

Exercice 16:

Le plan est muni d'un repère orthonormé

$(o, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (Δ) la droite d'équation $x+3=0$ et H le projeté orthogonal d'un point M(x,y) sur (Δ).

Madame, voulez-vous être le cercle dont je serais le centre,
la parabole dont je serais le foyer, l'ellipse dont je serais la directrice,
L'hyperbole dont je serais l'asymptote ?
En un mot, voulez-vous de moi pour époux ? (CHRISTOPHE)

2011/2012

- 1) Déterminer l'ensemble (E) des pts M ; $MO = \frac{1}{2}$
MH.
2) Ecrire une équation de (E) puis déterminer ses éléments caractéristiques. Dessiner (E).

Exercice 21:

On donne (E) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ et (H) $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$

Mq E et H se coupent en 4 points

Vérifier qu'en ces points les tangentes sont //

Exercice 22:

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé

$\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les droites:

D : $x + y - 1 = 0$ et $\Delta : x - y - 1 = 0$.

1°) Déterminer les coordonnées

- du point I intersection des droites D et Δ .
- d'un vecteur unitaire et directeur de D.

2°) a) Montrer que le triplet $(I, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ est un repère orthonormé qu'on

désignera par $\mathcal{R}'$.

c) Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) selon le repère $\mathcal{R}$ et de coordonnées (X, Y) selon le repère $\mathcal{R}'$.

Montrer que
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - X + Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases}$$

3°) Soit (Γ) l'ensemble des points du plan ayant pour équation:

(E) : $3x^2 + 3y^2 - 8xy - 6x + 8y - 4 = 0$ selon $\mathcal{R}$.

a) Déterminer une équation (E') de (Γ) selon $\mathcal{R}'$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ) .

4°) Soit les points A(-1, 2) et B(3, -2)

a) Vérifier que le point G(-4, -2) est un point de (Γ)

b) On admettra que: $4x - 3y + 10 = 0$ et $y + 2 = 0$ sont les équations respectives de (AG) et (BG). Montrer que la droite T d'équation $x - 2y = 0$

est la bissectrice intérieure de AGB.

c) Montrer que T est la tangente à (Γ) en G.

Exercice 24 : (6 points)

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan. Soit E la courbe d'équation $12x^2 + 16y^2 + 12x - 9 = 0$

1) a) Montrer que E est une ellipse. Préciser son excentricité, son centre et ses sommets principaux

b) Montrer que O est un foyer de E.

c) Tracer E.

2) Soit M un point de E d'abscisse x. On pose $(\vec{i}, \vec{OM}) \equiv \alpha [2\pi]$ où $\alpha \in]-\pi, \pi]$

a) Montrer que $OM = \frac{3 - 2x}{4}$

b) En déduire que $OM = \frac{3}{2(2 + \cos \alpha)}$

3) La droite (OM) recoupe E en un point N.

a) Montrer que $MN = \frac{6}{4 - \cos^2 \alpha}$

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles MN est minimale.

Exercice 23 :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan,

Soit la courbe H d'équation $4x^2 - y^2 + 2y - 5 = 0$

1° a) Montrer que H est une hyperbole dont on déterminera le centre, un sommet et une asymptote. Tracer H.

2° Soit M un point de coordonnées (x, y) telles

que
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \\ y = e^t - e^{-t} + 1 \end{cases}$$
 ; où t est un réel donné.

a) Montrer que M appartient à la courbe H

b) Étudier les variations de la fonction f

définie par $f(t) = e^t - e^{-t} + 1$.

c) Montrer que lorsque t varie dans $\mathbb{R}$, le point M décrit une partie de H que l'on précisera.

Madame, voulez-vous être le cercle dont je serais le centre,
la parabole dont je serais le foyer, l'ellipse dont je serais la directrice,
L'hyperbole dont je serais l'asymptote ?
En un mot, voulez-vous de moi pour époux ? (CHRISTOPHE)

2011/2012

Exercice 24: TN 2009

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(\cos \theta, 2 \sin \theta)$, où θ est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

- 1) a) Déterminer, par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de $(\mathcal{E})$.
b) Tracer $(\mathcal{E})$ et placer ses foyers.
c) Vérifier que le point M appartient à $(\mathcal{E})$.
- 2) Soit (T) la tangente à $(\mathcal{E})$ en M.
Montrer qu'une équation de (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $2x \cos \theta + y \sin \theta - 2 = 0$.
- 3) On désigne respectivement par P et Q les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées et on désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du triangle OPQ.
 - a) Montrer que $\mathcal{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$.
 - b) En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ est minimale si et seulement si M est le milieu du segment [PQ].