

Exercice 1:

Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point N d'affixe $f(z) = \frac{1}{2}(z + i\bar{z})$

- 1) a) Déterminer l'ensemble D des points M invariants par f
b) Montrer que $f[f(z)] = f(z)$
c) En déduire que N appartient à D
- 2) a) Montrer que $\frac{f(z) - z}{1 + i}$ est imaginaire pur.
b) Interpréter ce résultat géométriquement
- 3) Déduire de ce qui précède une construction du point N image de M par f .

Exercice 2:

Soit A le point d'affixe 1 et f l'application qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$,

associe le point N d'affixe $f(z) = \frac{z}{z-1}$

- 1) a) Calculer $(z-1)(f(z)-1)$
b) En déduire que les demi-droites $[AM)$ et $[AN)$ sont symétriques par rapport à la droite $D : y=0$.
- 2) Soit $\alpha \in]0, 2\pi[$
 - a) Montrer que $f(e^{i\alpha}) = \frac{1}{2} - i \cotg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
 - b) Construire le point N lorsque M est un point du cercle trigonométrique.

Exercice 3:

Soit : (E) $z^3 + m z^2 - \bar{m} z - 1 = 0, m \in \mathbb{C}^*$

- 1) a) Montrer que si z_0, z_1 et z_2 sont les solutions de (E) alors $z_0 z_1 z_2 = 1$.
b) Montrer que si z est solution de (E) alors $\frac{1}{z}$ est aussi solution de (E).
c) En déduire que (E) admet au moins une solution de module 1.
- 2) On suppose que $m = e^{i\varphi}$
 - a) Vérifier que $-m$ est une solution de (E)
 - b) Déterminer les autres solutions de (E).
- 3) Utiliser ce qui précède pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $2z^3 + (1+i\sqrt{3})z^2 - (1-i\sqrt{3})z - 2 = 0$.

Exercice 4: TN2001

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 où $a \in \mathbb{C} - \{1\}$

Soit f l'application de $P - \{B\}$ dans P qui à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{z-a}{z-1}$

1) Mq que les affixes des points invariants par f sont les solutions de (E) : $z^2 - 2z + a = 0$

2) a) On suppose que $a = 1 + e^{2i\varphi}$ où $\varphi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

Résoudre (E)

b) Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de E.

3) Dans cette question on suppose $a = -1$, soit $M(z)$ un point de $P - \{B\}$ et $M'(z')$; $z' = f(z)$.

a) Mq que $(\vec{u}, \vec{BM}) + (\vec{u}, \vec{BM'}) = 0 \pmod{2\pi}$

En déduire que la demi-droite $[BA)$ est une bissectrice de l'angle $(\vec{BM}, \vec{BM'})$

b) Mq que z' est imaginaire pur ssi $|z| = 1$

c) En déduire une construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B .

Exercice 5: TN 2002

Dans le plan complexe $P(o, \vec{u}, \vec{v})$

on considère les points $A(1)$, $B(-1)$ et on désigne par P' le plan privé de A : Soit $f : z' = \frac{z(\bar{z} - 1)}{z - 1}$

1) a- Soit C (i). Déterminer $f(C)$.

b- Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Mq que $\forall M \in \mathcal{C} - \{A\}$, on a $f(M) = B$

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

3) Soit M un point du plan privé de (AB) et du cercle $\mathcal{C}$

Mq que $\frac{Z_{\vec{M_1M'}}}{Z_{\vec{AM_1}}} = \frac{\bar{z} - z}{|z - 1|^2}$; où $M_1 = S_{(AB)}(M)$

En déduire que les vecteurs $\vec{M_1M'}$ et $\vec{AM_1}$ sont orthogonaux

b- Montrer que les vecteurs $\vec{M_1M'} \perp \vec{BM'}$

c- En déduire une construction géométrique du point M'

Exercice 6: TN 2003

Soit $E_d : z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = 0$

Où d est un nombre complexe de module 2

1) a- Vérifier que $2i$ est une solution de E_d Résoudre alors l'équation E_d

2) Dans le plan complexe $(o, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points $A(2i)$, $B(-i)$, $M(-i+d)$ et $N(-i-d)$

a) Calculer MN et déterminer le milieu de $[MN]$

b) En déduire que lorsque d varie, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.

c) Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que o est le centre de gravité du triangle AMN .

d- En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A

Exercice 7: TN : 2004

Soit $a \in \mathbb{C}$ et (E) : $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A $(1+ia)$ et B $(1-ia)$, On pose $a = a_1 + ia_2$; a_1 et a_2 réels.

a) Montrer que les points O, A et B sont alignés ssi $a_1=0$

b) Montrer que les vecteurs $\vec{OA} \perp \vec{OB}$ ssi $|a|=1$.

3) On suppose $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ et $1 - e^{ix} = -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$

b) En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes $1+ia$ et $1-ia$

c) Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

Exercice 8: TN 2005

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne le point A(1)

Soit l'application f de P dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') ; $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

1) Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

2) Soit le point M_0 d'affixe 2.

On pose pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$ on désigne par z_n l'affixe du point M_n et par Z_n l'affixe $\vec{AM_n}$.

a- Montrer que $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

b- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$

c- En déduire l'ensemble des valeurs n pour lesquelles les points A, M_0 et M_n sont alignés.

Exercice 9: TN 06

1) a) Vérifier que $(2-i\sqrt{3})^2 = 1-4i\sqrt{3}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z + 4i\sqrt{3} = 0$

2) Soit (E) : $z^3 - 3z^2 + 2(1+2i\sqrt{3})z - 4i\sqrt{3} = 0$

a) Vérifier que 1 est une solution de (E).

b) Vérifier que $\forall z$ on a : $z^3 - 3z^2 + 2(1+2i\sqrt{3})z - 4i\sqrt{3} = (z-1)(z^2 - 2z + 4i\sqrt{3})$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

d) Placer dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé (O, u, v) , les points A, B et C images des solutions de l'équation (E).

Exercice 10: TN 07:

1) Soit $\alpha \in]0, \pi[$ Résoudre (E): $z^2 - 2iz - 1 = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé

direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1+i$, $i + e^{i\alpha}$ et $i - e^{i\alpha}$ où $\alpha \in]0, \pi[$

a) Montrer que les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AN}$ sont orthogonaux.

b) Montrer que lorsque α varie dans $]0, \pi[$ les points M et N varient sur un cercle C que l'on déterminera.

3) a) Déterminer en fonction de α l'aire $A(\alpha)$ du triangle AMN

b) Déterminer la valeur de α pour laquelle l'aire $A(\alpha)$ est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle C.

Exercice 11 : TN 07

1) Résoudre dans IC: (E): $z^2 - 2iz - 1 - e^{i2\theta} = 0$ où $\theta \in]0, \pi[$

2) Dans le plan complexe, on considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1+i$, $i+e^{i\theta}$ et $i-e^{i\theta}$

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.

b) Montrer que lorsque θ varie dans $]0, \pi[$ les points M et N varient sur un cercle $\mathcal{C}$ que l'on déterminera.

3) a) Déterminer en fonction de θ l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ du triangle AMN.

b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle $\mathcal{C}$.

Exercice :12 TN08:

Résoudre dans IC: (E) : $z^2 - z + 1 = 0$

b) Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle.

c) en déduire les solutions de (E') : $z^4 - z^2 + 1 = 0$

2) Mettre le polynôme $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct

$\rightarrow \rightarrow$

(O, u, v), On désigne par A, B, C et D les images des solutions de l'équation (E') telles que :

$\text{Ré}(z_A) > 0, \text{Im}(z_A) > 0$; $\text{Ré}(z_B) > 0$ et $\text{Im}(z_D) > 0$

a) Placer les points A, B, C, et D

b) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD

Exercice :13 TN08:

Dans l'ensemble IC des nombres complexes, on considère l'équation : (E) : $z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8i = 0$

1) a) montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

b) Résoudre alors (E)

2) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct

$\rightarrow \rightarrow$

(O, u, v), on considère l'application f qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que : $z' = (1+i)z$.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Soit M un point du plan distinct de O et soit M' son image par f.

Montrer que le triangle OMM' est rectangle isocèle et en déduire un procédé de construction du point M'.

3) On considère les points A_n définis par : $A_0(-1+i)$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f(A_n)$

a) Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 .

b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

Exercice 14 TN 09:

1) Résoudre dans C l'équation (E) : $(1-i)z^2 + 2z + 4i = 0$

On notera z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $z_2 \in \mathbb{R}$

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \overset{0}{u}, \overset{0}{v})$.

On considère les points $A(z_1)$ et $B(z_2)$

C et D les symétriques de A et B par rapport au point I(i)

a) Calculer z'_1 et z'_2 les affixes respectives de C et D

b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

Exercice 15(Math2010)

Exercice 3 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note A le point d'affixe -2 .

On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes respectives α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E).

3) Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Placer dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, M, N et P.

b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4) a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\bar{\alpha}$ est une solution de (E).

b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

Exercice 16(TN scx 2010)

On donne C le cercle de centre O et de rayon 2 et B $(-1+i\sqrt{3})$

2) Placer sur une figure le point C $(1+i\sqrt{3})$, le point B et tracer le cercle C

Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

3) On se propose de déterminer l'ensemble E des points M(z) tel que z^3 soit un réel positif ou nul.

a) Vérifier que les points O, A et B appartiennent à E

b) Prouver que tout point M de $[OB)$ appartient à E

c) Soit z un nombre complexe non nul, de module r et θ .

Montrer que z^3 est un réel positif ssi $\theta = \frac{2k\pi}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$

En déduire que E la réunion de trois demi-droites que l'on déterminera. Représenter E sur la figure.

Exercice :17 TN08:

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (3+4i)z - 8+6i = 0$

2) Soit (E) : $z^3 - (1+4i)z^2 - (14+2i)z - 16+12i = 0$

a) Vérifier que (-2) est une solution de (E)

b) Déterminer les nombres complexes b et c tels que : $z^3 - (1+4i)z^2 - (14+2i)z - 16+12i = (z+2)(z^2+bz+c)$

c) Résoudre alors (E).

3) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = -1+2i$ et $z_B = 4+2i$

a) Montrer que le triangle OAB est rectangle.

b) Soit C le cercle circonscrit au triangle OAB et D le point d'affixes $4-3i$.

Montrer que la droite (OD) est tangente à C.

Exercice 18(INF TN2011)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E): $z^3 + iz^2 - 2z + 4i = 0$.

- 1) a) Vérifier que i est une solution de l'équation (E).
b) En déduire que z est solution de (E) si et seulement si $z = i$ ou $z^2 + 2iz - 4 = 0$.
- 2) a) Résoudre l'équation (E).
b) Écrire les solutions sous forme exponentielle.
- 3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives i , $\sqrt{3} - i$ et $-\sqrt{3} - i$.
a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
b) Montrer que le triangle ABC est isocèle de sommet principal A.

Exercice 19(SCx TN2011)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

- 1) a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b .
b) Vérifier que $b^2 = a$.
- 2) Soit C le point d'affixe $c = a + b$.
a) Placer les points A, B et C.
b) Vérifier que $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- 3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + z - c = 0$.
a) Vérifier que b est une solution de l'équation (E).
b) On désigne par d la deuxième solution de l'équation (E).

$$\text{Montrer que } d = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\left(\frac{-11\pi}{12}\right)}$$

- c) Placer alors, le point D d'affixe d .

Exercice 20(Sctech 2011)

- 1) Montrer que $ie^{i\frac{\pi}{6}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$.
- 2) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation
(E) : $z^2 - 2(e^{i\frac{\pi}{12}})z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$.
- 3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{12}}$.

- a) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.
- b) Placer les points les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- c) Calculer l'aire du losange OACB.

Exercice 21(Math2011)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1 .

1) a) Montrer que :

(le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si $\left(\frac{1+z}{z}\right)$ est imaginaire pur).

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $(O, \vec{u})$.

On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $\left(\widehat{OM, ON}\right) \equiv \left(\vec{u}, \vec{OM}\right)[2\pi]$ puis que $\left(\widehat{ON, OP}\right) \equiv \left(\vec{u}, \vec{OM}\right)[2\pi]$.

b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire .

