

Exercice 1 :

Déterminer la forme algébrique de :

$$Z_1 = \frac{(\sqrt{3}+i)}{(3-\sqrt{3}i)},$$

$$Z_2 = (1-i)^{4n-1}, n \in \mathbb{N}^*,$$

$$Z_3 = \sum_{k=0}^{2011} i^k$$

Exercice 2

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant votre réponse

soient $a = 1+i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2}(1+i)$

- il existe un entier n non nul tel que a^n est réel
- il existe un entier n non nul tel que $a^n = b^n$
- il existe un entier n non nul tel que $a^n = 1$
- il existe un entier n non nul tel que a^n est imaginaire

Exercice 3:

Soit $Z = \frac{z-1+2i}{2iz-1}$ où $z \neq \frac{-i}{2}$

- Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que Z soit réel.
- Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que Z soit imaginaire pur
- Déterminer l'ensemble des points $M(z)$; $|Z| = \frac{1}{2}$

Exercice 4:

Soit $Z = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$

- Ecrire Z^2 sous forme algébrique
- Déterminer le module et un argument de Z^2
- Déduire le module et un argument de Z
- Donner les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exercice 5 : Q.C.M.

Déterminer les réponses correctes.

- L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z| = z$ est :
a) une droite b) un cercle, c) une demi droite.
- L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z+4| = 1$ est
a) vide b) un cercle c) une droite
- l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z| = z + \bar{z}$ est inclus dans :
a) un cercle b) une demi-droite c) deux droites
- l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-i| = |1-z|$ est :
a) vide b) une droite c) un segment
- l'ensemble des points $M(z)$; $\arg(z+i) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$ est
a) un demi-cercle b) une droite c) une demi-droite
- Si $|z| = \sqrt{2}$ alors a) $\bar{z} = \frac{2}{z}$; b) $\bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{z}$; c) $\bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{2z}$

7) Si z est un nombre complexe non nul

d'argument $\frac{\pi}{6}$ alors un argument de $i\bar{z}$ est

$$\frac{-\pi}{6}; \quad b) \frac{\pi}{6}; \quad c) \pi/3$$

8) Un argument de $(1+i)^{2012}$ est

$$a) \frac{\pi}{2}; \quad b) \frac{\pi}{4}; \quad c) \pi$$

9) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls, d'images respectives M et M' dans le plan complexe, si z et z' vérifient l'égalité:

- $|z + z'| = |z - z'|$, alors
- les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.
 - les droites (OM) et (OM') sont parallèles
 - les droites (OM) et (OM') ne sont ni // ni $\perp$

10) Si z est un nombre complexe tel que $|z| = 3$, alors on a :

$$a) \bar{z} = \frac{3}{z} \quad b) \frac{\bar{z}}{z} = e^{i\alpha}; \alpha \in \mathbb{R} \quad c) |\bar{z}| = \frac{1}{3}$$

11) Si $z_A = 1 - 3\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - 3i$, alors une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ est :

$$a) \frac{5\pi}{6} \quad b) -\frac{\pi}{6} \quad c) \frac{\pi}{2}$$

12) Soit le nombre complexe $Z = \left(\frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} \right)^{10}$, $\theta \in]0, \pi[$

- Z est un réel strictement positif
- Z est un réel strictement négatif
- Z n'appartient pas à $\mathbb{R}$

Exercice 6 QCM

1) l'ensemble des points M d'affixe z

vérifiant la relation $\arg\left(\frac{2iz+2}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ est

un cercle deux demi droite un demi cercle.

2) Soit A et B d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = \sqrt{3}$ dans un repère orthonormal. L'affixe z_C du point C tel que ABC soit un triangle équilatéral est

$$-i \quad 2i \quad \sqrt{3}+i \quad \sqrt{3}+2i$$

3) Soit l'équation $z = \frac{6-z}{3-z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Une de ses solutions est :

$$-2-\sqrt{2}i \quad 2+\sqrt{2}i \quad 1-i \quad -1-i$$

4) On pose $z = -\sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

a) La forme algébrique de z^2 est

$$2\sqrt{2} \quad -2\sqrt{2}-2i\sqrt{2} \quad 2-\sqrt{2}+i(2+\sqrt{2}) \quad 2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$$

Exercice 18:

Soit $z_1=1-i$; $z_2=1-i\sqrt{3}$ et $Z = \frac{z_1^5}{z_2^4}$

Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_1 , z_2 et Z . Déduire les valeurs exactes

de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exercice 7 :

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$; tels que :

a) $\arg(z-2i) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$; b) $\arg(\bar{z}-i) = \frac{\pi}{3} (2\pi)$;

c) $\arg(z-2i) = \arg(-z) (2\pi)$,

f) $\arg(z-1+i) = \arg(-\bar{z}+1+i) (2\pi)$

d) $|z-2i| = |\bar{z}+i|$, e) $(z+i)(\bar{z}-i)=9$

g) $z = 1-2i + 4(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ où $[0, \pi]$

Exercice 10:

On pose $Z = \frac{iz}{z-1}$

Déterminer et construire les ensembles suivants

$E = \{M(z) \text{ tque } |z|=1\}$; $F = \{M(z); Z^2 \in i\mathbb{R}\}$

Exercice 11:

Z étant un nombre complexe $\in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

1°) $M(z)$, $B(z^2)$, $C(z^3)$ sont trois points distincts.

Déterminer l'ensemble des points M du plan pour que le triangle MBC soit rectangle en C .

2°) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour que les points $A(1)$, $M(z)$ et $M'(1+z^2)$ soient alignés

Exercice 12:

Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(z) = \frac{i+z}{\bar{z}}$$

1) Calculer $\varphi(-\frac{i}{2})$ et $\varphi(1-\frac{i}{2})$. φ est-elle bijective ?

2) Mque $\varphi(z)=1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$

3) Mque $\varphi(z)-1 = i \frac{1+2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2} z$

4) a) Mq si $\varphi(z)=z'$ alors $\bar{z} = z \bar{z}' + i$ et $z(1-z' \bar{z}') = i(z'-1)$

b) En déduire que si $|z'| \neq 1$ alors z' admet un unique antécédent par φ

Exercice 13:

1°) Soit φ un réel de $[-\pi, \pi]$ et z le nombre complexe défini par: $z = \frac{1}{2} [\sin\varphi + i(1 - \cos\varphi)]$

Déterminer, en fonction de φ , le module et un argument de z .

2°) φ est un réel de $]0, \pi[$.

Déterminer le module et un argument des nombres complexes : $a = z - i$ & $b = \frac{z}{z-i}$

3°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. Soit les points $M(a)$ et $N(b)$.

Déterminer les ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque φ varie dans $]0, \pi[$
Représenter ces ensembles.

Exercice 14 :

$$\text{Soit } A = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}} \right)^n - \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}} \right)^n ; n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que A est un imaginaire pur

2) Prouver que $A = i \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3}^n} \sin \frac{n\pi}{6}$

Exercice 15:

z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1

1) Montrer que le nombre complexe $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul

2) Soient A et B deux points du plan complexe P d'abscisses respectives a et b ,

On suppose que O , A et B sont non alignés ,

a) calculer en fonction de a et b l'abscisse z du point

G vérifiant $|b| \vec{GA} + |a| \vec{GB} = \vec{0}$

b) Montrer que $\frac{z^3}{ab} \in \mathbb{R}^*+$,

Déduire alors $\arg z$ en fonction de $\arg a$ et $\arg b$

Exercice 16

Répondre par Vrai ou Faux

(aucune justification n'est demandée).

1°) Soit L'équation (E) : $z^3 = \bar{z}$

a) $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (E)

b) Si α est solution non nulle de (E) alors $|\alpha| = 1$

c) Si $|\alpha| = 1$ alors α est solution de (E)

2°) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives a

et b telles que $\frac{a}{b} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$

- a) O, A et B ne sont pas alignés
- b) OAB est un triangle rectangle en O
- c) OAB est un triangle équilatéral

Exercice 17:

Soit E : $(1+i)z^2 - 2(\cos\theta - \sin\theta)z + 1-i = 0$

avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. z' et z'' sont les solutions de E

1°) Sans calculer z' et z'',

Mque $\arg(z') + \arg(z'') = \frac{-\pi}{2} \pmod{2\pi}$

2°) a- Résoudre dans C l'équation E.

b- Vérifier que $z'' = -i\overline{z'}$.

En déduire que M'' est l'image de M' par une symétrie orthogonale d'axe D que l'on précisera..

Exercice 20:

1°) Résoudre dans C, l'équation

$(E_0) : z^2 - 2iz + 1 + 2\cos 2\theta = 0$ où $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On désigne par z' et z'' les solutions de (E_0) telles que $\text{Im}(z') < \text{Im}(z'')$.

2°) Dans le plan complexes rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives

$z_1 = 2\sin\theta + z'$ et $z_2 = 2i + \frac{z'}{z''}$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 et

l'ensemble des points M_2 lorsque θ décrit $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Exercice 20 :

Soit P le plan complexe muni d'un r.o.n direct

$(O, \vec{u}, \vec{v})$. $\forall z \in C \setminus \{-2i\}$,

on pose : $Z = \frac{2\overline{z} + 4i}{z - 2i}$, Soient A(-2i) et B(2i).

1) Déterminer l'ensemble E des points M(z) tel que

$\text{Arg}(Z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

2)a) Déterminer les racines cubiques de -i sous forme exponentielle.

b) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Calculer z en fonction de $\frac{\theta}{2}$

sachant que $\frac{z-2i}{z+2i} = e^{i\theta}$

c) Résoudre alors dans C : $(\frac{2\overline{z} + 4i}{z - 2i})^3 = 8i$

Exercice 21:

1°) Résoudre dans C l'équation :

$(E) : z^2 - (a + a^2)z + a^3 = 0$ où $a \in C \setminus \{-1, -1\}$

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de cette équation.

2°) Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct. On considère les points A, B, C

d'affixes respectives 1, z_1 , z_2 .

a- Montrer que le triangle ABC est équilatéral ssi

$|a| = 1$ et $|a+1| = 1$

On pose $a = [1, \theta]$, $\theta \in]0, \pi[$.

Déterminer le module et un argument de $1 + a$ en fonction de θ .

b- Déterminer la valeur de θ pour laquelle le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 22:

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan

Complexe P et f l'application qui a tout point

d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+iz\overline{z}}{1+z\overline{z}}$,

A(i) ; B(-i)

1) Déterminer les points fixes de f

2) Mque les points A, M et M' sont alignés

3) Soit C le cercle de diamètre [OB]

a) Mque $\forall M \in P \setminus \{O, B\}, \arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}) [2\pi]$

b) En déduire que si $M \in C$, alors le point M' appartient à une droite fixe Δ que l'on précisera.

c) Donner une construction du point M' image d'un point M de C.

Exercice 23:

1°) Déterminer sous forme trigonométrique les solutions de l'équation : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$.

2°) En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous formes algébriques. Déduire des questions précédentes

les valeurs de $\cos\frac{11\pi}{12}$ & $\sin\frac{11\pi}{12}$

Exercice 24:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé

$$\vec{O} \rightarrow \vec{u}, \vec{v} : P \setminus \{A(-i)\} \rightarrow P \setminus \{A\} : M(z) \rightarrow M'(z'); \\ z' = \frac{1-z}{1-iz}$$

1) Montrer que f est bijective.

2) Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que z' soit réel.

3) a) Montrer que pour tout $z \neq i$, $z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$

b) Montrer que $AM \cdot AM' = \sqrt{2}$,

$$\vec{u} \rightarrow \vec{AM} + \vec{u} \rightarrow \vec{AM'} = \frac{3\pi}{4} (2\pi)$$

c) Déterminer l'image du cercle C de centre A et de rayon 1 par f .

d) Déterminer l'image par f de l'ensemble $\Delta \setminus \{A\}$

Où $\Delta : y = x - 1$

4) Déterminer l'image par f du cercle trigonométrique.

Exercice 25:

P est le plan complexe. $A(1)$, on considère l'application $f : P \rightarrow P$ qui à tout $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = 2z - z^2$.

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

2) Dans cette question on suppose que M est un point du cercle $C(O, 1)$ distinct de A .

a) Montrer que $AM = MM'$

b) Montrer que le rapport $\frac{z'-1}{z}$ est un réel

c) En déduire que les points A et M' sont symétriques par rapport à la tangente Δ en M au cercle C .

3) Résoudre dans IC l'équation $E : 2z - z^2 = 1 + e^{i2\theta}$ avec

$\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on note z_1 et z_2 les solutions de l'équation E ;

z_1 étant la solution telle que $\text{Im}(z_1) \geq 0$

4) Soient $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$.

a) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe que l'on précisera.

b) Déterminer et construire l'ensemble F des points M_1 quand θ varie,

Déduire l'ensemble des points M_2 .

Exercice 26

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, \pi]$.

$$\text{Soit } E : z^2 - 2iz - 1 - ie^{2i\theta} = 0$$

1) a) Déterminer la valeur de θ pour que $z_1 = 0$ soit une solution de E .

b) Résoudre E pour la valeur de θ trouvée.

2) Résoudre l'équation E .

3) On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on désigne par

A, B, C et I les points d'affixes respectives

$$2i, i + e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}, i - e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} \text{ et } i$$

a) Montrer que $[BC]$ est un diamètre du cercle (C) de centre I et de rayon 1.

b) Montrer que pour $\theta \neq \frac{\pi}{4}$, $OBAC$ est un rectangle.

c) Déterminer θ pour que $OBAC$ soit un carré.

Exercice 27 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct

$$(O, \vec{u}, \vec{v})$$

Soit A, M et N les points d'affixes respectives $-1, z$ et z' .

où z est un nombre complexe différent de -1

$$\text{et } z' = \frac{z^2}{z+1}.$$

1°) a) Montrer que $z' \in \mathbb{R}$ ssi $z = \bar{z}$ ou $z\bar{z} = -(z + \bar{z})$

b) En déduire l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z' est réel.

2°) Soit z un complexe non nul vérifiant

$$z\bar{z} = -(z + \bar{z}) \text{ et soit } \theta \text{ un argument}$$

de z , $\theta \in]-\pi, \pi[$.

a) Montrer que $|z| = -2 \cos \theta$.

b) En déduire que $z' = -4 \cos^2 \theta$

c) Montrer que si M varie sur le cercle C de centre A et de rayon 1, alors

N varie sur un segment que l'on précisera.

3°) On suppose que M est distinct de O .

Montrer que si le triangle OMA est rectangle en M , alors le triangle OMN est rectangle en O

Exercice 28:

On considère les nombres complexes z_n définis par,

$$\text{pour tout } n : z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n \text{ et } A_n \text{ d'affixe } z_n.$$

1) Calculer sous forme algébrique z_1 et z_2

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$

a) Vérifier que $\forall n \geq 1, z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})$

b) En déduire une relation entre d_n et d_{n-1} , pour $n \geq 1$ puis d_n en fonction de n et d_0

c) Donner une interprétation géométrique de chacun des nombres d_n .

d) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{k=n} A_k A_{k+1}$

Déterminer L_n en fonction de n et la limite de L_n

3) $\forall n$, on pose $a_n = \arg(z_n)$ (2π)

a) Quelle est la nature de la suite (a_n)

b) En déduire a_n en fonction de n

c) Pour quelles valeurs de n , les points O , A_0 et A_n sont-ils alignés.

Exercice 29

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit $\theta \in [0, \pi]$

1°) Soit dans C , l'équation

$$(E_\theta): z^2 - 2(1 + 3e^{i\theta})z - 3 + 10e^{i\theta} + 8e^{2i\theta} = 0. \text{ Résoudre}$$

(E_θ) dans z .

2°) On désigne par M et N les points d'affixes respectives

$$z_1 = 3 + 2e^{i\theta} \text{ et } z_2 = -1 + 4e^{i\theta}$$

a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie.

b) Peut-on avoir $M = N$?

c) Déterminer θ pour que O soit un point du cercle de diamètre $[MN]$.

3°) On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 3 + 2i$ et $z_B = -1 + 4i$.

Extérieurement au triangle OAB , on construit les deux carrés OA_1A_2A et OBB_1B_2 .

a) En remarquant que A_2 est l'image de O par une rotation de centre A , déterminer l'affixe de A_2 .

En déduire l'affixe du centre I du carré OA_1A_2A .

b) En remarquant que B_1 est l'image de O par une rotation de centre B , déterminer l'affixe de B_1 .

En déduire l'affixe du centre J du carré OBB_1B_2 .

c) Calculer l'affixe du milieu K du segment $[AB]$. A l'aide des affixes des différents points, calculer les distances KI et KJ , ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KJ})$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 30

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

A tout point M d'affixe z non réel, on associe le point M'

$$\text{d'affixe } z' = \frac{z\bar{z}}{\bar{z}-z}.$$

1) Montrer que M' appartient à $(O, \vec{v})$.

2) Montrer que : $|z'| = |z' - z|$. Interpréter le résultat géométriquement.

3) Soit M un point n'appartenant pas à $(O, \vec{u})$. Donner une construction géométrique de M'

4) Soit M un point n'appartenant pas à $(O, \vec{u})$.

a) Montrer que $\frac{z'-z}{z'} = \frac{z}{\bar{z}}$.

b) En déduire l'ensemble E des points M pour lesquels le triangle OMM' est rectangle en M' .

Exercice 31

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) a) Placer les points $A(1)$, $B(j)$ et $C(j^2)$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) Montrer que ABC est un triangle équilatéral de centre O .

2) Désignons par $I = B^*C$, $K = B^*A$ et $L = A^*C$

a) Caractériser l'antidépacement f qui envoie B en C et K en I

b) Définir la transformation $\varphi = f^{-1} \circ S_{AC}$

3) On désigne par s_1 , s_2 et s_3 les symétries orthogonales respectivement par rapport aux

droites (OA) , (OB) et (OC) et par r la rotation de centre

O d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Soit M un point du plan, $M_1 = s_1(M)$, $M_2 = s_2(M)$, $M_3 = s_3(M)$.

a) Montrer que $M_2 = r^2(M_1)$ et $M_3 = r(M_1)$ (où r^2 désigne $r \circ r$).

b) Prouver que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral lorsque M est distinct de O .

4) Soit M un point quelconque du plan P , d'affixe z non nul.

Montrer que les points M_1 , M_2 et M_3 ont pour affixes respectives $\bar{z}$, $j^2\bar{z}$ et $j\bar{z}$.

5) Soit $M_4 = S_{(BC)}(M)$.

a) Montrer que le point I est le milieu du segment $[M_1M_4]$.

b) En déduire que l'affixe de M_4 est $Z = -1 - \bar{z}$

6) a) Montrer que les points M_2 , M_3 et M_4 sont alignés si et seulement si $\frac{-1+j^2\bar{z}}{j^2\bar{z}-j\bar{z}}$ est réel.

b) Déduire l'ensemble des points M tels que les points M_2 , M_3 et M_4 sont alignés.

(On rappelle que : $1 + j + j^2 = 0$, $j^2 = \bar{j}$ et $j^3 = 1$)

