

Exercice 1 :Vrai-Faux

f étant une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; alors

1) $\int_{-1}^3 -f(x) dx = \int_3^{-1} f(x) dx$, 2) $\int_{-1}^3 -f(x) dx = \int_1^{-3} f(x) dx$

3) Si $\int_0^1 f'(x) dx = 0$ alors f est constante sur $[0, 1]$

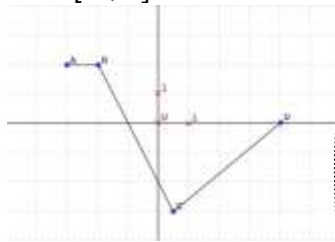
4) Si $\int_0^1 f'(x).f(x) dx = 0$ alors $f(0) = f(1)$ ou $f(0) = -f(1)$

5) Ci-contre, on considère la courbe représentative dans un repère orthonormé de la fonction affine par morceaux f définie sur $[-3, 4]$:

a) $\int_{-3}^4 |f(x)| dx > 15$;

b) $\int_{-3}^4 |f(x)| dx = \frac{21}{2}$

c) $\int_{-3}^4 |f(x)| dx = \frac{-13}{2}$



6) Soit $g_n(x) = \frac{(\cos x)^n}{(\cos x)^n + (\sin x)^n}$, $n \geq 2$ et $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(x) dx$

a) Le point $I(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe C_n de g_n .

b) $u_n = \frac{\pi}{4}$; pour tout $n \geq 2$

II) (QCM) Pour chaque question, préciser la référence de la seule réponse correcte

Soit $I = \int_{-2}^2 x^3 \sqrt{4-x^2} dx$

a) $I > 0$

b) $I < 0$

c) $I = 0$

1°) $\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2009} dx =$

a) 2010

b) $\frac{1}{2010}$

c) $2\sqrt{2}$

2°) Soit $I = \int_{-2}^2 x^3 \sqrt{4-x^2} dx$

b) $I > 0$

b) $I < 0$

c) $I = 0$

3°) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2x+8} - 2}{x} =$

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{6}$

c) 0

4°) Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout x de

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) =$

a) $\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

c) $\frac{1}{\cos x}$

Exercice 2

Toutes les fonctions considérées sont supposées continues. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

1) L'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction négative ou nulle est négative ou nulle.

2) L'intégrale d'une fonction paire sur $[0,1]$ est positive ou nulle.

3) L'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction minorée par 1 est inférieure ou égale à 1.

4) L'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction majorée par 1 est inférieure ou égale à 1.

5) L'intégrale d'une fonction impaire sur $[-1,1]$ est nulle.

Exercice 3:

On considère les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx$$

1) Calculer I_1 et $I_1 + I_2$

2) Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \frac{\sin(2x)}{1+2\sin x}$

a) Vérifier que $f(\pi - x) = -f(x)$

b) Déduire $\int_0^{\pi} f(x) dx$

Exercice 4

Parmi les égalités suivantes lesquelles sont correctes ?

1) $\int_0^{\pi} x \sin x dx = -\int_0^{\pi} \frac{x^2}{2} \cos x dx$

2) $\int_0^{\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} \cos x dx$

3) $\int_0^{\pi} x \sin x dx = \pi - \int_0^{\pi} \cos x dx$

4) $\int_0^{\pi} x \sin x dx = \pi - 2$

5) $\int_0^{\pi} x \sin x dx = \pi$

6) $\int_0^{\pi} x \cos x dx = -2$

7) $\int_0^{\pi} x \sin 2x dx = [\sin 2x]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \cos 2x dx$

8) $\int_0^{\pi} x \cos 2x dx = 0$

9) $\int_0^{\pi} x \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} x \sin^2 x dx$

$$10) \int_0^{\pi} x \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}$$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes.

$$L = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, A = \int_0^{\pi/4} \frac{du}{1+\sin 2u},$$

$$T = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx, R = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}$$

$$A = \int_0^2 (1-|x-1|^3) dx, C = \int_{-6}^6 |x^2-3x-10| dx,$$

$$H = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4x+1}} dx$$

Exercice 6:

$$\text{Soit : } v_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}, n \in \mathbb{N}^*$$

1°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n \leq 1$,

2°) Montrer que la suite v est convergente.

3°) Démontrer que $0 \leq 1 - v_n \leq \frac{1}{n+1}$,

puis déduire la limite de v

Exercice 7:

$$\text{Soit } I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx. \text{ Calculer } I_0.$$

Dque pour $n \geq 1$, $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$.

Exercice 8:

$$\text{Soit } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx, n \geq 1$$

1)a) Etudier la monotonie de la suite (J_n)

b) Déduire qu'elle est convergente.

2)a) Démontrer que $\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}, n \geq 1$

b) Déduire la limite de J_n

3) Etablir que pour tout $n \geq 1$, $J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

4) Déduire que pour tout $n \geq 3$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$

Déduire la limite de nJ_n .

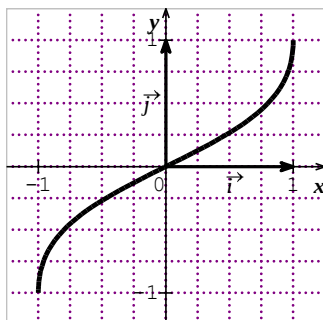
Exercice 9:

Dans un repère

orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

(unité 2 cm), on a représenté ci-contre la courbe de la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$



1°) En utilisant le graphique.

a) Montrer que f réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur $[-1, 1]$.

b) Etudier le signe de $f(x) - x$, pour $x \in [-1, 1]$

2°) On note g la réciproque de f .

a) Mque pour tout $x \in [-1, 1]$, $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

b) Calculer l'aire du domaine limité par les courbes $\mathcal{C}$ de f et $\mathcal{C}'$ de g .

c) Montrer que $\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} dx = 1 - \ln 2$

II) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+\sqrt{1-x^2}} dx$$

1°) Montrer que (U_n) est décroissante.

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout

$t \in [0, 1]$, on a : $\frac{1}{2} t^n \leq \frac{t^n}{1+\sqrt{1-t^2}} \leq t^n$.

En déduire que: $\frac{1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

3°) Montrer alors que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 10:

$$\text{Soit } (I_n) : I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t} dt \text{ et } I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} dt$$

Calculer I_0 , puis, mque $\forall n \geq 1$, $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$

Exercice 11:

$$A) \text{ Soit } I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

1) En intégrant par parties, montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a : $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. (1)

2) Calculer I_0 et I_1 et prouver par récurrence que :

$$I_{2n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} \times \frac{\pi}{2}, \text{ pour } n \geq 1;$$

$$I_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \times \frac{1}{(2n+1)}, \text{ pour } n \geq 0.$$

3)a) En revenant à la définition de I_n sous forme d'intégrale, montrer que la suite I_n est décroissante.

b) En déduire, à l'aide de (1), que : $\frac{n-1}{n} I_{n-1} \leq I_n \leq I_{n-1}$.

c) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$.

4) Etablir la formule de WALLIS (mathématicien anglais 1616-1703) :

$$\lim \left[\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \right]^2 \times \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

B) On se propose de déterminer la limite l de la suite u définie par : $n! = u_n \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (2), en utilisant la formule de Wallis écrite sous la forme :

$$\lim a_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \text{ avec } a_n = \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)} \times \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

1) Vérifier que : $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n = 2^n \times n!$;

$$2 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) = \frac{(2n)!}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}.$$

2) A l'aide de la relation (2) et des égalités précédentes, montrer que

$$a_n = \frac{U_n^2}{U_{2n}} \times \frac{n}{\sqrt{2n} \sqrt{2n+1}}.$$

3) En déduire que $l = \sqrt{2}\pi$.

Exercice 12:

Soient deux réels a et b tels que $a < b$.

$$\text{On pose } I_0 = \int_a^b \sqrt{b-x} \, dx$$

$$\text{et pour tout } n \in \mathbb{N}^* ; I_n = \int_a^b (x-a)^n \sqrt{b-x} \, dx$$

1) Justifier l'existence de I_n .

2) Calculer I_0 en fonction de a et b .

3) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} .

4) Calculer I_n en fonction de n , a et b .

Exercice 13

Soient (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$

$$\text{et } f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{2n-1} x^{2n-1}.$$

1) Montrer que : $\int_0^1 f(x) dx = u_n$.

2) Mque pour tout $x \neq -1$ on a : $f(x) + \frac{x^{2n}}{1+x} = \frac{1}{1+x}$

3) Déduire que $u_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx = \ln(2)$

4) Montrer que : $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx$

5) Déduire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 14

On définit la suite (I_n) par :

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt$$

1) a) Calculer I_0 et I_1

b) Mque pour tout $\forall p, I_p + I_{p+2} = \frac{1}{p+1}$

c) En déduire I_2 et I_3

2) Démontrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

3) a) En utilisant 1.(b) et 2., prouver que pour tout entier $n \geq 2, \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$

(b) Déterminer les limites des suites (I_n) et $(n I_n)$

$$4) \text{ Soit } u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0, u_n = I_0 + (-1)^n I_{2n+2}$

b) En déduire $\lim u_n$

Exercice 15:

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}, & \text{pour } x \neq 0 \\ f_n(0) = 2n+1 \end{cases}$$

1) Montrer que f_n est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$2) \text{ Soit } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$$

a) Vérifier que $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} + 2\cos 2nx$

b) Montrer que $I_n = I_{n-1}$, pour $n \geq 1$

c) En déduire la valeur de I_n

Exercice 16

1) Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$, continue, positive et décroissante.

Démontrer que pour tout $n > 0$;

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

2) On pose : $u_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ et $I_n = \int_1^n f(t) dt$; $n > 0$

a) Mque $I_{n+1} - I_2 \leq u_n - f(1) \leq I_n$; pour tout $n > 0$

b) En déduire que si $(I_n)_{n>0}$ est convergente vers un réel α alors $(u_n)_{n>0}$ est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 17:

Calculer une valeur approchée de $I = \int_0^1 \sqrt{1+t^4} \, dt$

par la méthode des rectangles en partageant l'intervalle $[0, 1]$ en 5 segments de même longueur.

Exercice 18:

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation : $y = \frac{-x^3+x}{x^2+1}$

Démontrer que $\mathcal{C}$ a une asymptote Δ en $+\infty$ et en $-\infty$

2) Déterminer l'aire en unité d'aire, du domaine D compris entre $\mathcal{C}$, Δ et les droites $x=2$ et $x=-2$

Exercice 19:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{1+t^2} dt$

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse -1 .

Exercice 20 :

Soit $f(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2} dt$

1°) Vérifier que f est définie sur $I = [0, \pi]$

2°) Montrer que f est dérivable sur I et calculer sa fonction dérivée.

3°) a) Vérifier que $f(x) = -4 \int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin^2(t) dt$

b) Expliciter $f(x)$

c) Dédire alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C} : y = \sqrt{4-x^2}$ et les droites d'équations $x=0$, $y=0$ et $x=1$

Exercice 21:

Dans le plan (oxy), on considère la courbe $\mathcal{C}$

d'équation : $y = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ avec $x \in [0, 1]$

Par rotation de $\mathcal{C}$ autour de l'axe (ox), on obtient un solide de révolution de volume v

Déterminer le volume de solide S.

Exercice 22 :

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

2) Soit $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2} dt$ la fonction définie sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$

a) Mque F est dérivable sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$

puis calculer $F'(x)$

b) Expliciter $F(x)$ en fonction de x .

3) On définit la suite u par :

$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ et $u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt ; n \in \mathbb{N}^*$

a) Mque $\forall n ; 0 \leq u_n \leq \frac{1}{1+2n}$; en déduire $\lim u_n$.

b) Mque $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{1+2n}$

3) Soit la suite v définie : $V_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{1+2n}$

Calculer u_{n+1} en fonction de u_0 et v_n , calculer $\lim v_n$.

Exercice 23:

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$,

on pose $G(x) = \int_{-x}^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

a) M que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $G'(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{1+x^2}$

b) On suppose que f est impaire, montrer que $G(x) = 0$

c) On suppose que f est paire, mque $G(x) = 2 \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$

d) En déduire que $\int_{-x}^x \frac{3t^2+2t+3}{1+t^2} dt = 6x$

Exercice 24:

Soient (I_n) et (u_n) les suites définies par :

$u_n = \int_0^1 t^n dt$ et $I_n = \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$

a) Montrer que $\forall n, 0 \leq I_n \leq u_n$.

b) Montrer que (u_n) et (I_n) convergent.

Exercice 25:

x étant un réel strictement positif donné, on considère les intégrales :

$I_n = \int_0^x \sin^{2n} t dt$ et $J_n = \int_0^x \sin^{2n} t \cos^2 t dt$, $n \geq 0$

a) Trouver une relation entre J_n , I_n et I_{n+1} .

b) En intégrant par parties, calculer J_n en fonction de I_{n+1} . En déduire une relation entre I_{n+1} et I_n .

c) Calculer I_0 et mque l'on peut ainsi calculer I_n et J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 26 :

Soit $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt$

a) Etudier la parité de F

b) Etudier le sens de variation de F .

c) Montrer que $0 \leq x < 1$, $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$

En déduire que F est bornée.

En déduire qu'il existe une fonction G continue sur $[-1, 1]$ qui soit prolongement de F .

Exercice 27 (4 points)

1° a) Vérifier que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\frac{2}{t^2 - 1} = \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}$$

b) Calculer alors le réel $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{t^2 - 1} dt$

2° Soit F la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sqrt{t}}{t - 1} dt$$

a) Montrer que F est dérivable sur $[0,1]$ et déterminer $F'(x)$.

b) En déduire que $F(x) = \int_0^x \frac{2t^2}{t^2 - 1} dt$.

c) Calculer alors $F\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercice 28 (QCM)

1) F est définie sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$F(x) = \int_{\sqrt{2}}^{\sin x} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}, \text{ alors :}$$

a) $F'(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos x}$ b) $F'(x) = -1$ c) $F'(x) = 1$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx =$

a) $\frac{1}{2n+1}$ b) 0 c) $\frac{2}{2n+1}$

Exercice 29

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}$

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe C dans le repère R .

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g que l'on déterminera.

b) Tracer la courbe C' de g dans le repère R .

3) Soit A en unité d'aire l'aire du domaine limitée par la courbe C et les droites $x=0$ et $y=1$

Montrer que $A = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^3} dx$

Exercice 30:

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

1) a) Montrer que la suite u est décroissante

b) Déduire que la suite u est convergente

2) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

b) Déterminer alors la limite de la suite u .

3) $\forall n \geq 3$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$

a) Vérifier que pour $n > 3$, on a : $u_n + u_{n-2} = I_n$

b) Montrer alors que $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$;

pour $n \geq 3$

c) En déduire que $\forall n \geq 3$; on a :

$$(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$$

d) Montrer alors que la suite (nu_n) est convergente vers une limite que l'on précisera.

Exercice 31 : (5 points)

Ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1) Donner le tableau de variation de f .

2) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

3) Soit un réel $\lambda > 1$ et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites : $x=0$ et $x=\lambda$.

a) Montrer que $\frac{(\lambda-1)^2}{2} \leq A(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{2} + \lambda$.

b) Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^2}$.

4) On suppose que $f(x) = ax + \frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Montrer que $a=1$ et $b=-1$.

b) Calculer $A(\lambda)$ en fonction de λ .

c) Retrouver alors $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^2}$.

Exercice 32: (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^4} dt$$

1) a) Montrer que, pour tout réel $x \geq \sqrt{2}$;

$$\int_{\sqrt{2}}^x \frac{t}{1+t^4} dt \leq 1 + \frac{1}{1-x^2}$$

b) Déduire que f est bornée sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

c) Montrer alors que f admet une limite finie L en $+\infty$.

2) Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par :

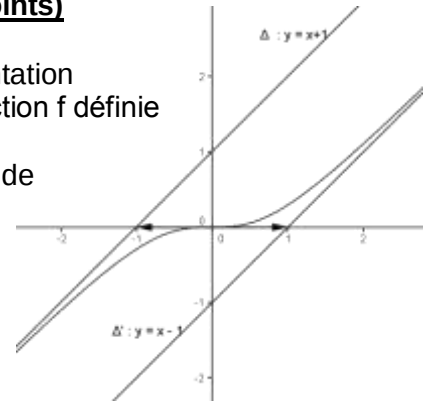
$$g(x) = \int_0^{\sqrt{\tan x}} \frac{t}{1+t^4} dt$$

a) Montrer que la fonction u définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par :

$u(x) = \sqrt{\tan x}$ réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}_+$.

b) Justifier que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et déterminer $g'(x)$.

c) Montrer alors que $g(x) = \frac{1}{2}x$, $\forall x$ de $[0, \frac{\pi}{2}[$.



d) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x}{1+x^4}$.

Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (H) de la fonction h , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormé.

Exercice 33: (7 points)

Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur

$$]-1, +\infty[\text{ par : } f_0(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\text{et pour } n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{x^n}{1+x}$$

On désigne par C_n la courbe de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°) a) Dresser le tableau de variation de f_n .

(On distinguera 3 cas : $n = 0$, $n = 1$ et $n \geq 2$).

b) Tracer C_0 , C_1 et C_2 .

c) Calculer l'aire de la surface limitée par les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

2°) Pour tout $x > -1$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^{n-1}.$$

a) Mque $\forall x > -1$, on a : $S_n(x) - f_0(x) = (-1)^{n+1} f_n(x)$.

b) Montrer que si $|x| < 1$, $S_n(x)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini.

En est-il de même pour $x = 1$?

3°) Soit x un réel positif ou nul et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{On pose } \sigma_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

a) Montrer que : $\ln(1+x) = \sigma_n(x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t) dt$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_{2n}(x) \leq \ln(1+x) \leq \sigma_{2n+1}(x)$

c) Calculer $\sigma_4\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\sigma_5\left(\frac{1}{2}\right)$.

En déduire une valeur approchée de $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Exercice 34 :

$$\text{On pose } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1) a) Justifier l'existence de I_n , puis calculer I_1 et I_2 .

b) Montrer que I_n est une suite décroissante.

c) Déduire que I_n est une suite convergente.

2) a) Montrer que $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

c) En déduire la limite de I_n .

3) On pose $f(n) = I_{n+4} - I_n$

a) Calculer $f(n)$ en fonction de n , $n \in \mathbb{N}^*$

b) Calculer $f(2) + f(6) + \dots + f(4k-2)$ en fonction de k et de I_{4k+2} .

c) En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4k-1} + \frac{1}{4k+1}\right]$

Exercice 35:

Soit F la fonction sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $F(x) = \int_0^{\sqrt{\sin x}} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt$

1) a) Mque $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\frac{\sin x}{2} \leq F(x) \leq \frac{1}{2} \tan x$

b) En déduire que F est dérivable à droite en 0.

2) a) Mque F est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a : $F(x) = \frac{x}{2}$.

c) Trouver alors l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe de la fonction : $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ et les droites d'équation $x=0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y=0$.

3) Soit $\mu \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$, on pose $I(\mu) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{\sin \mu}} \frac{\sqrt{1-t^4}}{t^3} dt$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(\mu)$

b) Déterminer $\lim_{\mu \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} I(\mu)$

Exercice 36 :

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}^*$

$$\text{par : } U_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx.$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$.

b) Montrer que U est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a) En intégrant par parties, calculer U_1 .

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_{n+1} - (n+1)U_n = -\frac{1}{e}$$

c) En déduire la valeur de U_2 .

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{ne}$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$