

Exercice 1 (3 points)

Répondre par « Vrai » ou « Faux ». Aucune justification n'est demandée.

- 1) Le quotient de (-23) par (-5) est 4.
- 2) Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux.
- 3) $147^{146} \equiv 2 \pmod{12}$.
- 4) $x^2 \equiv 0 \pmod{8}$ équivaut à $x \equiv 0 \pmod{8}$.
- 5) Si $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$ alors $x \equiv 19 \pmod{20}$.
- 6) Si p est un entier premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

Exercice 2:

Déterminer les restes modulo 9 de 2^n pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et r le reste dans la division euclidienne de n par 6.

Vérifier que $2^n \equiv 2^r \pmod{9}$

c) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $2^{6n} = 9k + 1$

2) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{18} par 19

3) En utilisant les questions précédentes, montrer que $2^{6n+2} + 3$ est un multiple de 19

4) a) Déterminer tous les entiers naturels qui divisent 108.

b) Déterminer tous les couples $(x; y)$ d'entiers naturels avec $x \leq y$ dont le PGCD est strictement compris entre 10 et 15 et qui vérifient

$$\text{PPCM}(x; y) - 3\text{PGCD}(x; y) = 108.$$

Exercice 3:

Pour chacune des questions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

1) « l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples

$(4 + 10k; 9 + 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».

2) Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

« Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

3) « Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n + 1$ sont premiers entre eux. »

Exercice 4 (5 points)

On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$

- 1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n , le reste de 7^n modulo 100.
- 2) En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a = 100k - 1$.
- 3) a) En utilisant la formule du binôme, montrer que $a^{100} \equiv 1 \pmod{100^2}$.
b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100} .

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $8x - 15y = 2$.

On pourra remarquer que $(4; 2)$ est une solution de cette équation.

Exercice 6:

a) Déterminer PGCD(-60, 100)

b) Donner PGCD(455, 312) et PPCM(455; 312)

Exercice 7:

1) Démontrer que pour tout entier naturel n , $3n+2$ et $5n+3$ sont premiers entre eux

2) Déduire tous les entiers naturels n tel que $3n+2$ divise $11(5n+3)$

3) Démontrer dans chaque cas que pour tout entier n , les entiers a et b sont premiers entre eux.

a) $a = n + 5$ et $b = 2n + 9$

b) $a = 15n + 8$ et $b = 21n + 11$

Exercice 8 :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls

1) a- Démontrer que :

PGCD $(a; b)$ divise PGCD $(3a+2b; 7a+5b)$.

b- Démontrer que :

PGCD $(3a+2b; 7a+5b)$ divise PGCD $(a; b)$.

c- Conclure.

2) Soit m, n, r, s quatre entiers relatifs ;

Démontrer que si $ms - nr = 1$, alors

PGCD $(ma+nb; ra+sb) = \text{PGCD}(a; b)$.

Exercice 9:

1) Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

2) Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

3) Soit $(S) \begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$

Déterminer l'ensemble des solutions de (S)

4) Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.

On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Exercice 10:

Déterminer tous les couples d'entiers (x, y) solutions de : $5x = 11y$

Déterminer tous les couples d'entiers (x, y) solutions de: 1) $12x + 5y = 1$ 3) $198x + 75y = 4$

Exercice 11

1) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $2x + 3y = 5$

2) Dans la suite les âges sont exprimés en années. En 2009, un père, dont l'âge n est compris entre 50 et 55, a deux fils A et B d'âges respectifs a et b .

On suppose que :

En 2001, l'âge du père était le double de l'âge de fils A.

En 2006, l'âge du père dépassait de trois ans le triple de l'âge du fils B.

a) Montrer que n , a et b vérifient : $\begin{cases} n = 2a - 8 \\ n = 3b - 3 \end{cases}$

b) En déduire que les âges n , a et b du père et de ses fils (TN 2009 SC INF)

Exercice 12:

1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $4x + 5y = 7$

a) Vérifier que $(-2, 3)$ est une solution de (E)

b) Résoudre l'équation (E)

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;

on considère les plans P et Q d'équations respectives : $x + 6y - z - 8 = 0$ et $3x - y + z + 1 = 0$

a) Montrer que P et Q sont sécants suivant une droite D.

b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points de D dont les coordonnées sont des entiers

Exercice 13:

1) a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.

b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.

c) En déduire que $6^{40} \equiv 1 \pmod{11}$ et que $6^{40} \equiv 1 \pmod{5}$.

d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

2) Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

a) Montrer que l'équation (E) $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

b) Montrer que l'équation (E') $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.

c) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').

d) Résoudre l'équation (E').

En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1 \pmod{40}$.

3) Pour tout entier naturel a , démontrer que si $a^{17} \equiv b \pmod{55}$ et si $a^{40} \equiv 1 \pmod{55}$, alors $b^{33} \equiv a \pmod{55}$.

Exercice 15:

Soit p un entier et n un entier naturel non nul. On pose $S = 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}$.

1) a) Vérifier que $(1-p)S = 1 - p^n$.

b) En déduire que $(1-p, 1)$ est une solution particulière de (E) : $Sx + p^n y = 1$

2) Application : On prend $n = p = 3$.

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E') : $13x + 27y = 1$

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E'') : $13x + 27y = 2$

Exercice 16:

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $W = \{0; 1; 2; \dots; 24; 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
S	T	U	V	W	X	Y	Z										
18	19	20	21	22	23	24	25										

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de W le reste de la division euclidienne de $(a \cdot n + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :
étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$.

étape 2 : le reste de la division de

$2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7.

étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.

a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p . Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.

b. Coder le mot AML.

4. On se propose de décoder la lettre E.

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de W tel que

$5n - 26y = 2$, où y est un entier.

b. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.

A. Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.

B. Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.

C. En déduire qu'il existe un unique couple $(x; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leq x \leq 25$.

c. Décoder alors la lettre E.

Exercice 17

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1) Vérifier que le couple $(-7; -3)$ est solution de (E).

2) Résoudre alors l'équation (E).

3) En déduire le couple d'entiers relatifs $(u; v)$ solution de (E) tel que $0 \leq u \leq 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
V	W	X	Y	Z																
21	22	23	24	25																

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

– on calcule $11x + 8$

– on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y .
 x est alors « codé » par y .

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25 \pmod{26}$; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z.

La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1) Coder la lettre W.

2) Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.

a) Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j , on a : $11x \equiv j \pmod{26}$

équivalent à $x \equiv 19j \pmod{26}$.

b) En déduire un procédé de décodage.

c) Décoder la lettre W.

Exercice 18

Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes :

1) a) Déterminer tous les entiers naturels qui divisent 72.

b) Déterminer tous les couples $(x; y)$ d'entiers naturels avec $x \leq y$ dont le PGCD est strictement compris entre 30 et 40 et qui vérifient $\text{PPCM}(x; y) - 4\text{PGCD}(x; y) = 72$.

2) a) Montrer que Si $\text{pgcd}(a, 10) = 1$ alors $a \equiv 1 \pmod{10}$ ou $a \equiv 3 \pmod{10}$ ou $a \equiv 7 \pmod{10}$ ou $a \equiv 9 \pmod{10}$

b) Déduire alors que Si $\text{pgcd}(a, 10) = 1$ alors $a^4 \equiv 1 \pmod{10}$

3) Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a \wedge b = 1$.

a) Montrer que $a + b$ et ab sont premiers entre eux.

b) Montrer que $a + b$ et $a^2 - ab + b^2$ sont soit premiers entre eux, soit divisibles par 3.

Exercice 19 :

Pour chacune des questions suivantes indiquer la bonne réponse.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

Aucune justification n'est demandée.

1) L'entier 5 est un inverse modulo 6 de :

a) 5 b) -5 c) 1

2) Le reste de la division euclidienne de 2010^{6030} par 2011 est :

a) 1 b) 2010 c) 2009

(On admet que 2011 est premier)

3) L'entier 2011^{2010} admet

a) 2011 diviseurs b) 4022 diviseurs c) 2021 diviseurs

4) Soit S la somme des diviseurs entiers naturels de $n = 2011^{2010}$

Le couple $(2011^{2010}, S)$ est solution de :

a) $2011x - 2010y = 1$ b) $2010x + 2011y = 1$

c) $x - y = 2011$