# Rappels

## 1 Généralités

DEFINITION

- Soit I un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$.
- La fonction $f : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ s'appelle suite réelle.

NOTATION

- A la place des lettres f, g, h,... , on utilise les lettres u, v, et w, ...
- A la place de x on utilise les lettres n, p, q ...

  Ainsi une suite réelle peut être notée, $u : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto u(n) \end{cases}$
- Le réel $u(n)$ s'appelle terme général de la suite $u$.
- Le terme général $u(n)$ est noté $u_n$. $n$ s'appelle indice et on lit $u$ indice $n$ ou tout simplement $un$.

Soit $u$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ :

- $u_0, u_1, u_2, \cdots$ s'appellent termes de la suite u.
- $u_0$ est appelé premier terme de la suite.

  $u_1$ est appelé deuxième terme de la suite. etc...

Ainsi une suite réelle peut être notée :

$u$ : ou bien : $\left(u_n\right)_{n\in I}$ ou bien : $u_0, u_1, u_2, u_3, \cdots$ (si $I = \mathbb{N}$).

## 2 Suite arithmétique

- **Pour montrer que u est une suite arithmétique :**
  - soit on calcule $u_{n+1}$ - $u_n$ et on doit trouver un réel r qui ne dépend pas de n. r est alors la raison de la suite.
  - Soit on constate que le terme général $u_n$ est de la forme $u_n = an + b$ et dans ce cas $u$ est une suite arithmétique de raison $a$.
- **Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique** on montre par exemple que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ ou bien $u_0 + u_2 \neq 2\, u_1$
- **Pour montrer que a, b, c sont trois termes consécutif**, dans cette ordre, d'une suite arithmétique on peut montrer que $2b = a + c$
- **Pour exprimer $u_n$ en fonction de n** on utilise la formule $u_n = u_p + (n-p)\, r$ où r est la raison de la suite et $u_p$ pouvant être $u_0$ , $u_1$ , $u_2$ ... etc.
- **Pour calculer la somme S** des termes consécutifs d'une suite arithmétique on utilise la formule :

  $S = \dfrac{\text{nombre de termes dans S}}{2}$ ( 1er terme de la somme S + dernier terme de S )

  • **Le nombre $N$ de terme dans une somme se calcule avec les indices** :

  $N$ = indice du dernier terme dans la somme − indice du premier terme dans la somme +1

  • **lorsque on n'a pas les indices** dans la somme S on peut exceptionnellement utiliser la règle suivante pour calculer le nombre $N$ de termes dans S :

$$N = \frac{\text{dernier terme dans S} - \text{premier terme dans S}}{\text{raison}} + 1$$

# Exercices et problèmes

**1** Cocher la bonne réponse

**1.** Soit u une suite de premier terme $u_3$ alors le $100^{eme}$ terme est :

□ $u_{100}$ □ $u_{103}$
□ $u_{102}$

**2.** Soit u une suite de premier terme $u_0$ et
$S = u_5 + u_6 + u_7 + \cdots + u_{67} + u_{68}$
Le nombre de terme dans la somme S est :

□ 68 □ 69 □ 64

**3.** Si u une suite arithmétique de raison r = 3 et tel que $u_6 = 32$ alors $u_{17}$ est égal à :

□ 65 □ 83 □ 50

**4.** Si u une suite arithmétique tel que $u_2 = 14$ et $u_7 = 4$ alors la raison de u est :

□ 2 □ -2 □ -4

**5.** Si une suite arithmétique t est telle que
$t_1 = 2$ et $t_2 = 3t_3$

□ 3 □ 2 □ $-\frac{4}{5}$

**6.** Si $u$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison 3 et $S$ est la somme des 10 premiers termes de $u$ alors $S$ est égale à :

□ 115 □ 130
□ 230

**7.** Si $u$ est une suite arithmétique de raison $-\frac{4}{5}$ est tel que $u_1 = 2$ ,et la somme des $n$ termes consécutifs de $u$ a partir de $u_1$ est 0 alors $n$ est égal à

□ 6 □ 10 □ 21

**8.** Soit la suite $u$ dont le terme général est $u_n = \frac{2n+1}{3}$, alors u est une suite :

□ arithmétique de raison 2
□ arithmétique de raison
□ n'est pas une suite arithmétique.

**9.** Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$, alors la suite$(v_n)$ définie par :

$$v_n = u_{n+1} + u_n$$

□ est une suite arithmétique de raison $2r$
□ est une suite arithmétique de raison $r$
□ n'est pas une suite arithmétique

**2** **1.** Soit la suite logique de nombres suivants : $1, 2, 6, 42, 1806 \cdots$ Quel sera le nombre suivant ?

**2.** La Suite de Conway est la suite logique suivante : $1, 11, 21, 1211 \cdots$ Quel sera le nombre suivant ?

**3.** Soit la suite logique suivante : $8, 10, 13, 17, 22, \cdots$ Quel sera le nombre suivant ?

**4.** Soit la suite logique suivante : $1, 2, 6, 18, \cdots, \cdots, 486, \cdots$ Quels sont les termes manquants ?

**5.** Soit la suite logique suivante : $4, 6, 15, 105, \cdots$ Quel sera le nombre suivant ?

**6.** Compléter la suite de nombre suivant :$\cdots, 51, 95, 147, \cdots,$

**3** **1.** Soit la suite u de terme général : $u_n = \frac{2n+1}{n^2-n}$.

**a.** Donner et calculer le premier terme, le deuxième terme, le troisième terme et le centième terme de la suite $u$.

**b.** Calculer : $u_{2n+1}$ ; $u_{3n+2}$ ; $u_{n^2} + 1$.

**2.** On considère la suite $(V_n)$ définie par :
$V_n = \frac{3n+2}{n+4}$

**a.** Calculer $V_0$, $V_1$, $V_2$, $V_{46}$ et $V_{96}$

**b.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{2} \leq V_n < 3$

**3.** On considère la suite $(U_n)$ définie par :
$\begin{cases} U_0 = 0 \ ; \ U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 2\,U_{n+1} + U_n \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$
Calculer $U_2$ et $U_7$.

**4.** Soit la suite $(U_n)$ définie, pour tout entier $n \geq 1$, par :
$U_n = 1 + (-1)^n \ \frac{5}{2^{n-1}}$

**a.** Calculer $U_1$, $U_2$, $U_3$.

**b.** Exprimer en fonction de $n$ les termes $U_{2n}$ et $U_{2n+1}$

**c.** Vérifier que le rapport $\frac{u_{n+1}-1}{u_n-1}$ est indépendant de $n$.

**4** Soit la suite u définie sur par
$u_n = u_0 \times 10^n$ et $u_2 = 200$

**1.** **a.** Calculer les 4 premiers termes de cette suite.

**b.** Exprimer $u_{n+2}$ en fonction de $u_n$

**2.** On considère la suite $v$ définie par
$v_n = \frac{1}{2}u_{2n+1}$
Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

**5** Soit la suite $(V_n)$ définie par :
$V_0 = 1$ et $V_{n+1} = \frac{V_n}{1+V_n}$ ; $n \in \mathbb{N}$.

**1.** Calculer $V_1$, $V_2$ et $V_3$.Que peut on conclure ?

**2.** On pose $U_n = \frac{1}{V_n}$

**a.** Calculer $U_0$, $U_1$ et $U_2$.

**b.** Montrer que $\left(U_n\right)$ est une suite arithmétique.

**c.** Exprimer $U_n$ en fonction de $n$. En déduire l'expression de $V_n$ en fonction de $n$. Retrouver alors $V_3$.

**d.** Déterminer en fonction de n la somme :

$$S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{n-1}$$

**6** Soit la suite $\left(u_n\right)$ définie par :
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{5\,u_n}{3\,u_n + 5}$.

**1.** Calculer les 4 premier termes de $u$. La suite u est elle arithmétique ?

**2.** On pose $v_n = \dfrac{5}{u_n}$.

**a.** Calculer les 4 premier termes de $v$.

**b.** Montrer que $v$ est une suite arithmétiques. Exprimer alors $v_n$ en fonction de $n$.

**c.** Exprimer alors $u_n$ en fonction de $n$.

**d.** Calculer : $S = v_{10} + v_{11} + \cdots + v_{68}$

**7** Soit $u$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3\,u_n - 1}{1 + u_n} \end{cases}$.

**1.** Calculer $u_1$ , $u_2$. $u$ est elle arithmétique ?

**2.** Soit la suite $v$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$.

**a.** Montrer que v est une suite arithmétique et déterminer $v_n$ en fonction de $n$.

**b.** En déduire $u_n$ en fonction de $n$.

**3.** Calculer

$$S = \frac{1}{\sqrt{V_0} + \sqrt{V_1}} + \frac{1}{\sqrt{V_1} + \sqrt{V_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{V_{54}} + \sqrt{V_{55}}}$$

**8** Soit $u$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = \dfrac{25}{10 - u_n} \end{cases}$

**1.** Calculer $u_1$ , $u_2$. $u$ est elle arithmétique ?

**2.** Soit la suite $v$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 5}$ .

**a.** Montrer que $v$ est une suite arithmétique et déterminer $v_n$ en fonction de $n$.

**b.** En déduire $u_n$ en fonction de $n$.

**9** On définie la suite $u$ par :
$u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} = u_n + 2\,n$.

**1.** Calculer $u_1$ , $u_2$ et $u_3$ .

**2.** On pose pour $n \in \mathbb{N}$ : $v_n = u_{n+1} - u_n$

**a.** Quelle est la nature de $(v_n)$ ?

**b.** Calculer la somme $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

**c.** Exprimer alors $u_n$ en fonction de $n$.

**10** Soit $(U_n)$ une suite tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$U_0 + U_1 + U_2 + \cdots U_n = 2\,n^2 + 2\,n$$

**1.** Calculer $U_0$, $U_1$, $U_2$ et $U_3$.

**2.** Quelle conjecture peut on faire sur la suite $U$ ?

**3.** Démontrer.

**11** Soit $u$ la suite définie par : $u_0 = 1$, et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n}$ .

**1.** La suite $u$ est-elle arithmétique ?

**2.** On pose alors $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ .

**a.** Montrer que $v$ est une suite arithmétique.

**b.** Exprimer alors $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

**12** **1.** On pose $S = \dfrac{1}{3} + 1 + \dfrac{5}{3} + \dfrac{7}{3} + 3 + \ldots + \dfrac{19}{3} + 7$.
Calculer S.

**2.** Calculer la somme des entier multiples de 7 qui sont plus grand que 100 et plus petit que 1000.

**13** Prove that if $a, b, c$ form an arithmetic sequence, then $b^2 + bc + c^2, c^2 + ca + a^2, a^2 + ab + b^2$ form an arithmetic sequence.

**14** Soit la suite $\left(t_n\right)$ définie par :

$$t_0 = 1, t_{n+1} = \sqrt{2 + t_n^2}$$

**1.** Montrer que $\left(t_n\right)$ n'est pas arithmétique.

**2.** Soit la suite $\left(V_n\right)$ définie par : $V_n = t_n^2$ .
Montrer que $\left(V_n\right)$ est arithmétique.

**3.** En déduire $t_n$ en fonction de $n$.

**15** Soit $\left(U_n\right)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \dfrac{n(1 + U_n) + 2}{n + 1}$
On pose $V_n = n(1 - U_n)$ et $t_n = V_n - V_{n+1}$

**1.** **a.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $V_{n+1} = -nU_n - 1$

**b.** En déduire que $\left(t_n\right)$ est une suite arithmétique.

**2.** **a.** Soit $S_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_{n-1}$.
Exprimer $S_n$ en fonction de $n$.($n \in \mathbb{N}^*$).

**b.** Exprimer $S_n$ en fonction de $V_n$ et $V_0$.

**3.** Exprimer $V_n$ puis $U_n$ en fonction de $n$ ;

**16** **1.** $u$ est une suite arithmétique de terme $u_0$ de raison $r$.

**a.** Sachant que $r = 3$ et $u_6 = 32$, calculer $u_0$ et $u_{17}$.

**b.** Sachant $u_2 = 4$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_5 = 30$. calculer $u_0$ et $r$.

**c.** Sachant $r = -3$ et $u_1 = 6$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = -90$. Calculer $n$.

**2.** **a.** Les quatre premiers termes d'une suite arithmétique sont $u_1, u_2, u_3$ et $u_4$ tel que $u_1 + u_3 = 28$ et $u_2 + u_3 = 12$. Calculer ces termes.

**b.** Une suite arithmétique $u$ est tel que $v_1 = -3$ , $v_n = 37$ et $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 187$. Calculer n et la raison de la suite.

**3.** Déterminer 5 termes consécutif d'une suite arithmétique sachant leur somme est 15 et leur produit 210.

**4.** In an arithmetic sequence is $t_2 = 3t_3$ . The sum of n terms, starting from $t_1$ , is 0. Calculate $n$

**5.** Calculate all m values such that the roots of the following equation constitute an arithmetic sequence. $x^4 - (3m + 1)x^2 + m^2 = 0$

Answer $m = 3$ ou $m = -\dfrac{3}{19}$

**17** Soit $U$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2 - U_n} \end{cases}$$

.

**1.** Calculer $U_1$ et $U_2$ . En déduire que $U$ n'est pas une suite arithmétique.

**2.** Soit $(V_n)$ la suite définie sur par $V_n = \dfrac{1}{U_n - 1}$.

**a.** Montrer que $(V_n)$ est une suite arithmétique de raison $-1$.

**b.** Exprimer alors $V_n$ en fonction de $n$.

**c.** Calculer $S = V_5 + V_6 + \cdots + V_{10}$.

**3.** **a.** Montrer que $U_n = \dfrac{n}{n+1}$.

**b.** Exprimer $U_{n+1} - U_n$ en fonction de n.

**c.** Calculer la somme

$$T = \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \cdots + \frac{1}{19 \times 20}$$

**18** Soit $u$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4}{4 - U_n} \end{cases}$$

**1.** **a.** Calculer $u_1$ et $u_2$

**b.** En déduire que la suite $u$ n'est pas une suite arithmétique.

**2.** Soit $v$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

**a.** Montrer que $v$ est une suite arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{2}$

**b.** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

**c.** Montrer que $u_n = \dfrac{2n + 2}{2 + n}$

**d.** Comparer $u_n$ et $u_{n+1}$

**3.** **a.** Calculer la somme $A = v_5 + v_6 + \cdots v_{30}$

**b.** Calculer la somme

$$B = \left(v_6^2 - v_5^2\right) + \left(v_8^2 - v_7^2\right) + \left(v_{10}^2 - v_9^2\right) + \cdots + \left(v_{30}^2 - v_{29}^2\right)$$

**19** **1.** Soit $(U_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $U_1 = 1825$.

**a.** Calculer $r$ sachant que $U_{24} = 675$.

**b.** Calculer $S = U_1 + U_2 + \cdots + U_{24}$

**2.** Une petite entreprise a obtenu un emprunt de 30.000 dinars de l'état. Cette somme est remboursée, sans intérêt, en deux ans par traites mensuelles dégressives : Chaque mois le remboursement diminue de 50 dinars.

**a.** Calculer le montant de la première traite et celui de la dernière.

**b.** De quelle somme devrait on diminuer le remboursement mensuel pour que la dernière traite soit de 560 dinars ?

**20** **1.** Résoudre dans l'équation $x^2 + 9x - 400 = 0$.

**2.** On dispose d'un budget de 4000 dinars pour creuser un puits.

Les dépenses sont fixé à 100 dinars pour le premier jour, 120 D pour le deuxième, 140 dinars pour le troisième et ainsi de suite en augmentant de 20 Dinars par jour.

On désigne par $u_n$ les dépenses du $n^{ème}$ jours.

**a.** Déterminez $u_5$.

Précisez la nature de la suite u, et exprimez $u_n$ en fonction de n.

**b.** Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par $S_n$ , la somme dépensée après n jours de travail.

Calculer $S_n$ .

**c.** Indiquez le nombre maximum de jours de travail qu'on peut atteindre avec la le budget qu'on a.