Rappels

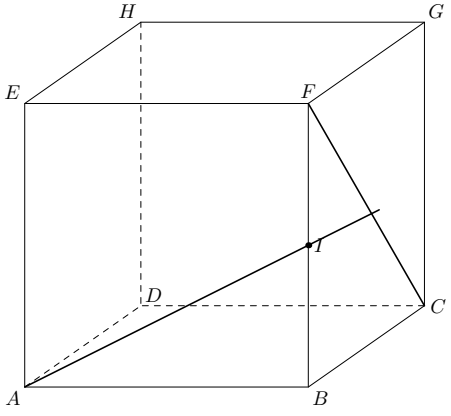
1 Perspective cavalière

Dans une représentation en perspective cavalière :

1. les segments visibles sont dessinés en traits pleins ; les autres sont dessines pointillés.
2. deux droites de l'espace parallèles sont représentées par deux droites parallèles.
3. des droites concourantes sont représentées par des droites concourantes, points alignés sont représentés par des points alignés ;
4. le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné ;
5. dans un plan de face, une figure est représentée en vraie grandeur.

Exemple :
Dans la figure ci-contre $ABCDEFGH$ est un cube, I est milieu de $[BF]$.

- Sur le dessin, les droites (EF) et (EH) ne sont pas perpendiculaires, alors qu'en réalité, elles le sont.
- Sur le dessin, $AB \neq AD$, alors qu'en réalité, $AB = AD$.
- Sur le dessin, les droites (AI) et (BG) semblent sécantes. En réalité, elles ne le sont pas. En effet, la droite (AI) coupe le plan (BCG) en un seul point : le point I. Or, dans ce plan, I n'est pas sur la droite (BG).



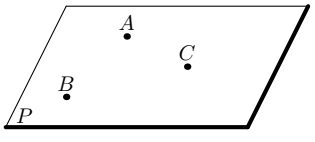
2 Axiomes d'incidence

Les axiomes d'incidences de la géométrie dans l'espace sont des axiomes qui fournissent des relations entre les points, les droites et les plans de cette géométrie.

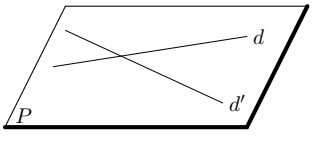
1. Par deux points distincts de l'espace il passe une et une seule droite. Cette droite peut-être notée (AB).
2. Par trois points non alignés, A, B et C passe un et un seul plan. Ce plan peut-être noté (ABC).
3. Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan.
4. Les résultats de géométrie du plan sont applicables dans chaque plan de l'espace.

Il en résulte qu'un plan peut être déterminé par l'une des conditions suivantes :

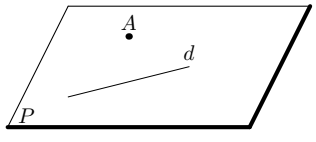
trois points non alignés



deux droites sécantes



une droite et un point extérieur à celle-ci

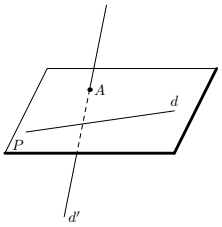


3 Positions relatives de droites et plans

1. d et d' sont deux droites de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :

   (a) il n'existe aucun plan contenant ces deux droites, elles sont dites non coplanaires,

   (b) il existe un plan contenant ces deux droites, elles sont dites coplanaires (elles sont alors sécantes ou parallèles dans ce plan).



2. d est une droite et P un plan de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

   (a) la droite et le plan n'ont qu'un point commun, la droite et le plan sont dits sécants (voir la figure précédente),

   (b) la droite est incluse dans le plan,

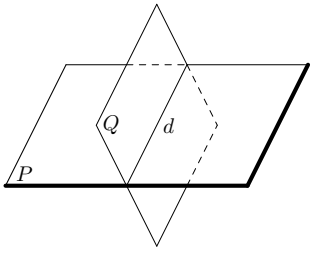
   (c) la droite et le plan n'ont aucun point commun.

3. P et Q sont deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

   (a) les plans ont un point commun et sont distincts, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point, (ainsi deux plans distincts qui ont deux points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points)

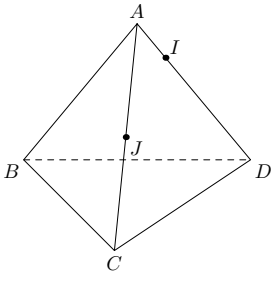
   (b) les plans sont confondus,

   (c) ils n'ont aucun point commun.



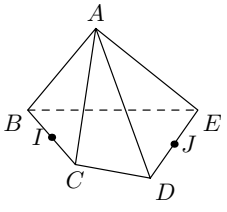
Pour déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Pour déterminer le point d'intersection d'une droite et d'un plan on peut déterminer l'intersection de cette droite avec une droite de ce plan.
Dans la figure ci-contre, Déterminer l'intersection de (IJ) *et le plan* (BCD)

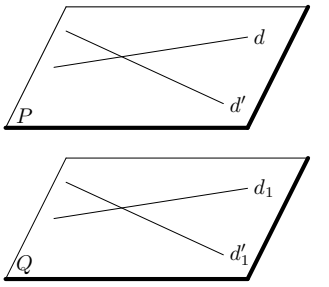
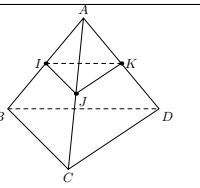


Montrer qu'une droite est paralléle a un plan

On peut montrer qu'elle est parallèle à une droite de ce plan.
Application :
Dans la figure ci-contre on noite G le centre de gravité de ADE et H celui de ABC, Prouver $(HG) \parallel (BCD)$.



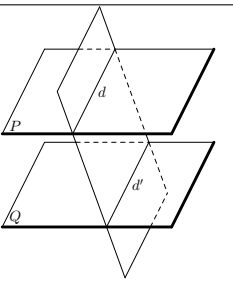
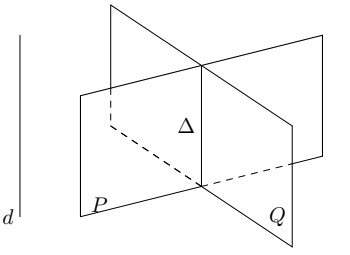
Montrer que deux plans sont parallèles

On peut montrer que deux droites sécantes du premier plan sont parallèles à deux droites sécantes du deuxième		 Montrer que $(IJK) \parallel (BCD)$

Montrer que deux droites sont parallèles

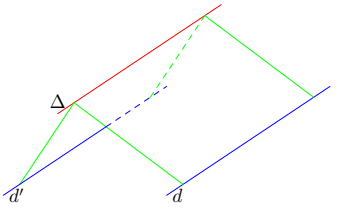
- Si on un plan contenant les droites , on utilise la géométrie dans la plans
- Sinon on utilise les nouveaux théorèmes sur le parallélisme dans l'espace

4 Les nouveaux théorèmes du parallélisme dans l'espace

Enoncé	Si P et Q sont deux plans parallèles, alors tout plan qui coupe P coupe aussi Q et les droites d'intersection sont parallèles.	Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.
Figure		
Rédaction	Si $\begin{cases} \bullet\ P \parallel Q \\ \bullet\ R \cap P = d \text{ et } R \cap Q = d' \end{cases}$ alors $d \parallel d'$	Si $\begin{cases} \bullet\ d \parallel P \text{ et } d \parallel Q \\ \bullet\ P \cap Q = \Delta \end{cases}$ alors $d \parallel \Delta$

Théorème du toit

d et d' sont deux droites parallèles. P est un plan contenant d et P' un plan contenant d'.
Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à d et d'.



Rédaction

Si $\begin{cases} \bullet\ d \parallel d' \\ \bullet\ d \subset P \text{ et } d' \subset P' \\ \bullet\ P \cap P' = \Delta \end{cases}$ alors $d \parallel d' \parallel \Delta$

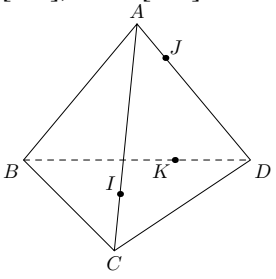
Exercices

1 QCM.

Cocher la bonne réponse.

1. Si deux droites d'un plan sont parallèles à deux droites d'un autre plan, alors les plans sont :
   - ☐ parallèles ☐ sécants
   - ☐ pas de conclusion
2. Soit $\mathscr{P}$ un plan contenant une droite Δ . Si une droite d est parallèle au plan $\mathscr{P}$ alors les droites d et Δ sont :
   - ☐ parallèles
   - ☐ coplanaires
   - ☐ on ne peut conclure
3. Deux droites d et d' sont parallèles. Si la droite d est incluse dans le plan $\mathscr{P}$ alors le plan $\mathscr{P}$ est :
   - ☐ parallèle à la droite d'
   - ☐ sécant à la droite d'
   - ☐ on ne peut conclure
4. Deux plans P et Q sont parallèles. Si une droite Δ est incluse dans le plan P, alors la droite Δ :
   - ☐ est parallèle au plan Q
   - ☐ coupe le plan Q
   - ☐ on ne peut conclure
5. Deux plans P et Q sont sécants suivant une droite Δ. Un plan $\mathscr{R}$ est parallèle à Δ Alors le plan $\mathscr{R}$ coupe le plan P suivant une parallèle à Δ.
   - ☐ Vrai ☐ Faux
6. Deux plans P et Q sont strictement parallèles. Une droite Δ est incluse dans le plan P. Soit A un point de Q, alors le plan défini par Δ et le point A est sécant au plan Q suivant une droite parallèle à Δ.
   - ☐ Vrai ☐ Faux
7. Deux plans sécants P et Q sont parallèles à une même droite Δ alors P et Q sont sécants suivant une droite d parallèle à Δ.
   - ☐ Vrai ☐ Faux

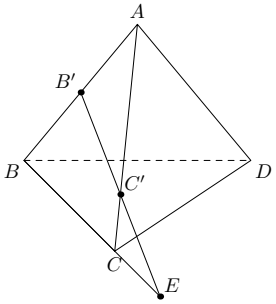
2 Dans le tétraèdre ci-dessous, donner les positions relatives des droites ou plans sachant que : $I \in [AC]$, $JE \in [AD]$ et $K \in [BD]$.



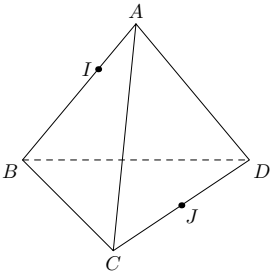
1. Droites (IJ) et (CD).
2. Droites (AC) et (BD).
3. Plans (BIJ) et (ADC).
4. Plan (ADC) et droite (IJ).
5. Plan (BIJ) et droite (AK).
6. Plans (AKJ) et (BIC).

3 $ABCD$ est un tétraèdre. B' est un point de l'arête $[AB]$, distinct de A et de B. C' est un point de l'arête $[AC]$, distinct de A et de C.

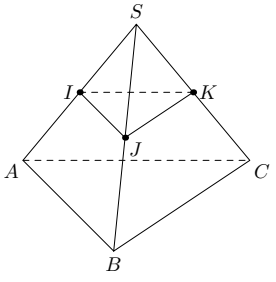
On suppose que les droites $(B'C')$ et (BC) se coupent en E. Trouver l'intersection des plans (BCD) et $(B'C'D)$.



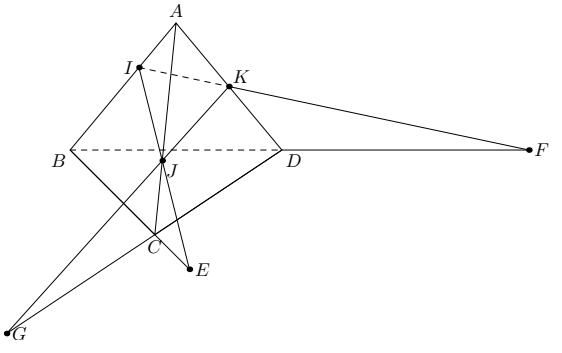
4 $ABCD$ est un tétraèdre. I et J sont des points des arêtes $[AB]$ et $[CD]$. Déterminer l'intersection des plans (ABJ) et (CDI).



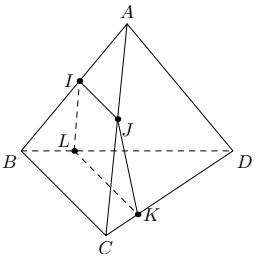
5 Dans le tétraèdre $SABC$, le point I est le milieu de $[SA]$, le point J est le milieu de $[SB]$ et point K est le milieu de $[SC]$. Montrer que le plan (IJK) est parallèle au plan (ABC).



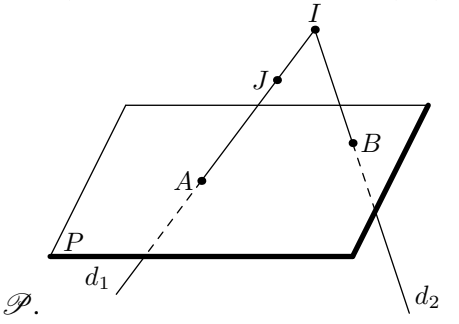
6 $ABCD$ est un tétraèdre. I est un point de $]AB[$, J un point de $]AC[$ et K un point de $]AD[$. On appelle E l'intersection de (IJ) et (BC),F l'intersection de (IK) et (BD) et G l'intersection de (JK) et (CD). Montrer que E, F et G sont alignés.



7 $ABCD$ est un tétraèdre, I un point de $[AB]$ et J un point de $[AC]$ tels que (IJ) est parallèle à (BC). Soit K un point de $[CD]$ et L, le point d'intersection de (IJK) et (BD). Montrer que (LK) est parallèle à (IJ).



8 Deux droites d_1 et d_2, sécantes en I, coupent un plan en A et B. Soit J un point de $[AI]$ et K un point de la droite d_2. Construire le point M (s'il existe), intersection de la droite (JK) avec le plan $\mathscr{P}$.



9 ABC et DEF sont les bases d'un prisme droit. I est un point de $[BC]$. La parallèle à (BE) passant par I coupe $[EF]$ en J. Montrer que (IJ) et (AD) sont parallèles puis montrer que (AI) et (DJ) sont parallèles.

10 Soit $ABCD$ un tétraèdre et I, J deux points appartenant respectivement aux arêtes $[AB]$ et $[BC]$ tels que (IJ) n'est pas parallèle à (AC). Soit P le plan passant par B et parallèle au plan (IJD). Le but de l'exercice est de tracer l'intersection du plan P avec le plan (ACD).

1. La droite (IJ) coupe la droite (AC) en K. Tracer la droite d'intersection des plans (ACD) et (IJD). Justifier.
2. Soit Δ la droite d'intersection du plan P et du plan (ABC). Pourquoi a-t-on Δ parallèle à (IJ) ? Tracer Δ.
3. La droite Δ coupe la droite (AC) en L. Soit Δ' la droite d'intersection du plan P et du plan (ACD). Pourquoi a-t-on Δ' parallèle à (DK) ? Tracer Δ'.

11 Soit une pyramide de sommet S dont la base est un quadrilatère $ABCD$.

On place I sur $[SA]$ tel que $SI = \frac{1}{3}SA$, et J sur $[SD]$ tel que $SJ = \frac{1}{3}SD$

1. Tracer Δ l'intersection du plan (CIJ) et du plan de base. Justifier cette construction.
2. Déterminer sans justifier la section de la pyramide par le plan (CIJ)

12 Soit une pyramide $SABCD$ telle que (AB) et (CD) se coupent en E.

1. Déterminer l'intersection des plans (SAB) et (SDC)
2. Un plan P parallèle à (ES) coupe (SA) en I, (SB) en J, (SC) en K, (SD) en L. Montrer que (IJ) et (KL) sont parallèles.

13 Une pyramide $SABCD$ est telle que la base $ABCD$ est un parallélogramme. Appelons I, J, K les milieux des arêtes $[SB]$, $[SC]$ et $[AB]$

1. Démontrer que les droites (IJ) et (AD) sont parallèles
2. Déduisez de la question 1) que le plan (SDK) et la droite (IJ) sont sécants
3. Justifiez et construisez l'intersection des plans (SKD) et (SBC)
4. Justifiez et construisez l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (SKD)

14 Soient deux parallélogrammes $ABCD$ et $ABEF$ non situés dans un même plan M et N deux points appartenant respectivement à (AC) et (BF) tels que les parallèles à (AB) menés respectivement par M et N coupent les droites (AD) en I et (AF) en J

1. Faire une figure
2. Montrer que les points M, N, I et J sont coplanaires .
3. Montrer que les droites (IJ) et (DF) sont parallèles.