Exercices et problèmes

1 Cocher la bonne réponse

1. A est l'image de B par l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{3}{4}$ signifie

a. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ ☐

b. $\overrightarrow{CB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$ ☐

c. $\overrightarrow{CA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ ☐

2. Dans la figure ci-dessous le rapport de k de



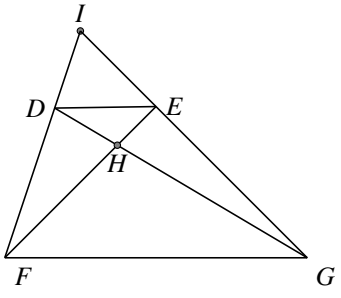
l'homothétie de centre C qui transforme A en B est :

a. $k = \frac{2}{3}$ ☐

b. $k = -\frac{2}{3}$ ☐

c. $k = -\frac{3}{2}$ ☐

3. Dans la figure ci-dessous, FGED est un trapèze.



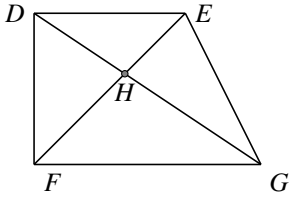
Le centre de l'homothétie qui envoie D en G et et E en F est :

a. G ☐

b. H ☐

c. I ☐

4. Dans la figure ci-dessous,$FGED$ est un trapèze tel que $\overrightarrow{FG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DE}$



Le rapport de l'homothétie qui envoie D en G et E en F est :

a. $\frac{3}{2}$ ☐

b. $-\frac{3}{2}$ ☐

c. $-\frac{2}{3}$ ☐

5. Soit h une homothétie de rapport k qui transforme le triangle ABC de périmètre P en un triangle $A'B'C'$ de périmètre P' . Alors :

a. $P' = P$

b. $P' = k \times p$

c. $P' = |k| \times P$.

2 A et B sont deux points distincts du plan. On considère l'application f du plan définie par :$f(M) = M'$ signifie

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BM}$$

1. Montrer que f admet un seul point invariant I.

2. Montrer que pour tout M, $\overrightarrow{IM'} = 6\overrightarrow{IM}$.

3. En déduire la nature de f.

3 Soient A et B, 2 points du plan P, et f l'application de P dans P qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

1. Montrer que f admet un unique point invariant I.

2. Montrer que f est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

3. Déterminer
$E = \left\{M \in P\,;\left\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\|\right\}$

4 Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$ tel que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$ et O le point d'intersection de ses diagonales.

On considère l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$

1. Démontrer que : $h(C) = O$.

2. Construire le point M tel que $h(B) = M$.

3. On suppose que A et B sont fixes et
$BC = r\,(r \in \mathbb{R}_+^*)$.
Déterminer et construire l'ensemble des point O lorsque C varie.

5 ABC est un triangle rectangle en A. H le barycentre de $(B, 2)$ et $(C, 1)$. I et J les projetés orthogonaux de H sur (AB), (AC) respectivement. (AH) et (IJ) se coupent en O.

Par A, on mène la parallèle à (IJ) qui coupe (HI) en P et (HJ) en Q.

h : l'homothétie de centre H transformant J en Q.

1. **a.** Déterminer $h<(IJ)>$.
   b. Montrer que : $h(O) = A$.
2. **a.** Prouver que le quadrilatère $AIHJ$ est un rectangle.
   b. Quel est alors le rapport k de cette homothétie.
   c. En déduire que le point $J = H * Q$.
3. On suppose que B et C sont fixes et A varie. Sur quelle ligne varie le point Q ?

6 A, B, C et D sont quatre points distincts tels que : $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

1. Soit h l'homothétie qui transforme A en C et B en D. Construire le centre I de h et trouver le rapport de h.
2. Déterminer une deuxième homothétie g qui transforme $[AB]$ en $[CD]$.

7 $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont deux cercles non isométriques de centres respectifs I et J.

Soit $[IM]$ et $[JN]$ deux rayons parallèles de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ respectivement. La droite (MN) coupe (IJ) en O.

Soit h l'homothétie de centre O qui transforme I en J

1. Montrer que h transforme M en N.
2. Montrer que h transforme $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

8 $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont deux cercles de centres respectifs I et J tangents extérieurement en un point T. Soit h l'homothétie de centre T qui transforme I en J.

1. Montrer que h transforme $\mathscr{C}_1$ en $\mathscr{C}_2$.
2. Soit A un point C_1. Construire à la règle uniquement le point B = h(A).
3. Une droite Δ est tangente à $\mathscr{C}_1$ en A.
   Montrer que $(JB) \perp \Delta$.

Application : Étant donnés un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O, une droite $\mathscr{D}$ et un point P de $\mathscr{D}$, construire un cercle $(\mathscr{C}')$ tangent à $(\mathscr{C})$ et tangent à $\mathscr{D}$ en P.

9 Soit un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1 et soit A un point de $(\mathscr{C})$. On considère l'homothétie h de centre A et de rapport -3.

1. Construire $(\mathscr{C}')$ image de $(\mathscr{C})$ par h.
2. Soit I le barycentre des points $(O, -3)$ et $(A, 2)$.Placer I puis déterminer le rapport de l'homothétie de centre I qui transforme $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$.
3. Soit Δ une droite variable passant par I. la droite Δ coupe $(\mathscr{C})$ en M et N. Les droites (AM) et (AN), recoupent le cercle $(\mathscr{C}')$ en M' et N'.
   a. Montrer que $h_{(A,-3)}<[MN]> = [M'N']$.
   b. Soit H le milieu de $[MN]$ et K le milieu de $[M'N']$. Sur quelle ligne fixe se déplace le point K quand Δ varie.

10 AIJ est un triangle inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.

Soient B et C les symétriques de A par rapport à I et J respectivement. On désigne par M le milieu de $[IJ]$, par D le point diamétralement opposé à A et par N le projeté orthogonal de D sur (BC).

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2.

1. Déterminer les images par h des points I, J et O.
2. Quelle est l'image par h de (IJ) ? De (OM) ?
3. Montrer que A, M et N sont alignés.

11 $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O et de rayon $R = 3$.

A est un point intérieur à $(\mathscr{C})$. Quel est l'ensemble des symétriques du point A par rapport à tous les points de $(\mathscr{C})$?

12 $(\mathscr{C})$ est un cercle de diamètre $[AB]$. On désigne par O son centre. I est un point de $[BA)$ tel que $I \notin [AB]$.

A tout point M de $(\mathscr{C})$ distinct de A et B on associe le point P diamétralement opposé à M sur le cercle $(\mathscr{C})$ et le point N intersection des droites (IM) et (PB).

Déterminer et construire l'ensemble des points N lorsque M varie sur $(\mathscr{C}) \setminus \{A, B\}$.

13 $ABCD$ est un losange de centre O dont les sommets A et B sont fixes et les sommets C et D sont mobiles. Sur quelle ligne se déplace le point O ? Déduire alors sur quelle ligne se déplace le point C.

14 Soit ABC un triangle, G son centre de gravité, O le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre.

On pose $I = A * B$ et $J = A * C$ et on considère l'homothétie h de centre G et de rapport -2.

1. Déterminer les images par h de (OI) et (OJ).
2. En déduire que $h(O) = H$ et que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Application : $(\mathscr{C})$ est un cercle, A et B sont deux points donnés de ce cercle. C est un point qui décrit $(\mathscr{C})$.

Quelle l'ensemble décrit par le centre de gravité G de ABC ? Quelle l'ensemble décrit par l'orthocentre H du triangle ABC ?

15 $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O. A chaque point M de $(\mathscr{C})$, on associe la médiatrice du segment $[OM]$: elle coupe $(\mathscr{C})$ en P et P'. T est le point d'intersection des tangentes à $(\mathscr{C})$ en P et P'.

1. Démontrer que $\overrightarrow{OT} = 2\,\overrightarrow{OM}$
2. Sur quel ligne fixe se déplace T lorsque M varie sur $(\mathscr{C})$?

16 *Problèmes de construction*

1. Étant donné deux droite sécantes D et Δ et un point A n'appartenant ni à D ni à Δ. Construire M sur D et N sur Δ tel que A soit barycentre des points $(M, 2)$ et $(N, 3)$.
2. ABC est un triangle et $BCDE$ est un carré. (AE) coupe (BC) en I. On note h l'homothétie de centre A et qui transforme E en I.
   a. Construire l'image du carré $BCDE$ par h. Noter I, J, K, L ses sommets, avec J sur (AB), K sur (AC).
   b. On donne maintenant un triangle ABC, construire un carré $IJKL$ de façon que $J\in[AB]$, $K\in[AC]$, I et L sur (BC).

17 On considère un cercle Γ de centre Oet deux points A et B diamétralement opposés sur ce cercle. On choisit sur le segment $[AB]$ un point fixe C distinct de O, A et B.

Une droite Δ variable passe par C coupe Γ en M et N.

1. Déterminer l'ensemble des points I milieux du segment $[MN]$ quand Δ varie.
2. Δ est supposée maintenant distincte de (AB).
   Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2.
   On pose $H = h(I)$.
   a. Montrer que $BMHN$ est un parallélogramme.
   b. Montrer que le H est l'orthocentre du triangle AMN.
   c. Déterminer l'ensemble décrit par H quand Δ varie.

18 Soient deux points O et O' tel que $OO' = 4$. le point A est le barycentre des points $(O, 3)$ et $(O', 1)$ et les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs 1 et 3.

1. Montrer que $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par l'homothétie $h_{(A,-3)}$.
2. Trouver le centre I de l'homothétie h' de rapport 3 et telle que $h' \circ \mathscr{C} = \mathscr{C}'$. Construire I.
3. Une droite Δ variable passant par I coupe $\mathscr{C}$ en M et N. la droite (AM) recoupe $\mathscr{C}'$ en M' et la droite (AN) recoupe $\mathscr{C}'$ en N'.
   a. Montrer que $M' = h(M)$ et $N' = h(N)$.
   b. Soit $J = M * N$ et $K = M' * N'$.
   Sur quelle ligne fixe se déplace le milieu K, lorsque Δ varie ?
4. a. Construire la tangente (IT) au cercle $\mathscr{C}$.
   b. Démontrer que (IT) est aussi tangente à $\mathscr{C}'$ en L.
5. La droite (OO') recoupe $\mathscr{C}$ en E et $\mathscr{C}'$ en F.
   (ET) et (FL) se coupent en S. Évaluer l'angle $\widehat{ESF}$.

19 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon 3. Soit I un point tel que $OI = 2$ et $h = h_{(I,-\frac{3}{2})}$ l'homothétie de centre I et de rapport $-\dfrac{3}{2}$

1. Déterminer et construire le cercle $\mathscr{C}' = h\left(\mathscr{C}\right)$.
2. On donne $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}' = \{M, N\}$;
   $(IM) \cap \mathscr{C} = \{M, B\}$ et $(IM) \cap \mathscr{C}' = \{M, B'\}$.
   Déterminer $h(M)$; $h(B)$ et $h\left(h(B)\right)$.
3. (IN) recoupe $\mathscr{C}$ en K et recoupe $\mathscr{C}'$ en K'.
   a. Montrer que $(BK) \,//\, (B'K')$
   (Indication : Trouver $h(K)$ puis $h\left(h(K)\right)$)
   b. Montrer que $\dfrac{B'K'}{BK} = \dfrac{9}{4}$.

20 On considère un rectangle $MNPK$ inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ et tel que $MK = a$ et $MN = a + 2$, où $a > 0$. On pose $I = M * N$.

1. Pour quelles valeurs de a, l'aire de $MNPK$ est supérieure à 35 ?
2. Soit h l'homothétie qui transform M en P et I en K.
   a. Quel est le rapport de h ?
   b. Construire $h(MNPK) = M'N'P'K'$ et $h(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$.
   c. Quelle est l'aire de $M'N'P'K'$ en fonction de a ?
   d. Quels sont le centre et le rapport de l'autre homothétie h' qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$?

21 $ABCD$ un trapèze tel que ${}_V AB = \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{DC}$. Soit h l'homothétie telle que $h(A) = D$ et $h(B) = C$.

1. a. Construire le centre O de h.
   b. Déterminer le rapport k de h.
2. Les droites (AC) et (BD) se coupent en I. On désigne par J le quatrième sommet du parallélogramme $CIDJ$.
   a. Déterminer les images par h des droites (AC) et (BD).
   b. Montrer que O, I et J sont alignés.
3. La droite (OI) coupe (AB) en M et coupe (CD) en N. Montrer que $M = A * B$.

22 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point variable du cercle $\mathscr{C}$ privé de A et B. G est le barycentre des points pondérés $(B, 1)$ et $(M, 2)$.

1. Construire G.
2. Déterminer l'ensemble des points G lorsque M varie.
3. Construire le point C et la droite $\mathscr{D}_1$ images respectives du point Aet de la droite (AM) par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.
4. Soit $\mathscr{D}_2$ la droite parallèle à (BM) passant par A et $\mathscr{D}_1 \cap D\mathscr{D}_2 = \{M'\}$.
   Quel est l'ensemble décrit par le point M' ?
5. **a.** Construire Ω le centre de l'homothétie h' qui transforme M en M' et B en A.
   b. Prouver que $\frac{\Omega A}{\Omega B} = \frac{\Omega C}{\Omega A}$.
   c. Déduire $h'(A)$.
6. Soit G' barycentre de $(A,1)$ et $(M',2)$.
   a. Montrer que Ω, G et G' sont alignés
   b. Construire G'.

23 On donne une droite $\mathscr{D}$ et deux points fixes B et C n'appartenant pas à $\mathscr{D}$ et tels que les droites $\mathscr{D}$ et (BC) soient sécantes.

1. Construire le point A' barycentre des points pondérés $(B,1)$ et $(C,2)$.
2. Soit A un point variable de $\mathscr{D}$ tel que ABC soit un triangle non aplati, on désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par M le point défini par :
   $$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$
   a. Montrer que M est le milieu de $[IC]$.
   b. Montrer que (IC) et (AA') se coupent en M (On pourra montrer que M est le barycentre des points A et A')
   c. Déduire que M est l'image de A par une homothétie de centre A' dont on donnera le rapport.
   d. Quel est l'ensemble Δ des points M lorsque A varie sur $\mathscr{D}$. Construire Δ.
3. Soit N le point image de I par la translation de vecteur .
   a. Construire N.
   b. Donner le rapport de l'homothétie de centre B qui transforme M en N.
   c. Déduire l'ensemble $\mathscr{L}$ des points N quand A varie sur $\mathscr{D}$.

24 Soit un triangle ABC. Construire un carré $PQRS$ tels que
- P et Q soient sur la droite (BC).
- R ∈ (AC).
- S ∈ (AB).

25 Soient $[AB]$ un segment de longueur 5 et I le barycentre de $(A,2)$ et $(B,3)$.
Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de diamètres respectifs $[IA]$ et $[IB]$.

1. Soit h l'homothétie de centre I tel que $h(A) = B$.
   a. Donner le rapport de h.
   b. Montrer que $h(\mathscr{C}_1) = \mathscr{C}_2$.
2. Soit f l'homothétie de rapport tel que $f(A) = I$.
   a. Déterminer et construire le centre O de f.
   b. Montrer que le point B est barycentre des points I et O affectés de coefficients que l'on déterminera.
   c. Déterminer alors $f(I)$.
3. Soit M un point de $\mathscr{C}_1$.
   a. Construire les points $N = h(M)$ et $P = f(M)$.
   b. Montrer que $[NP]$ est un diamètre de $\mathscr{C}_2$.

26 Soit $[AC]$ un segment donné, Δ la droite perpendiculaire à (AC) en A et B un point variable de Δ distinct de A. On considère O, I et J les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, et h l'homothétie de centre A et de rapport 2.

1. **a.** Déterminer $h(I)$ et $h(J)$.
   b. Construire $\mathscr{C}' = h(\mathscr{C})$ où $\mathscr{C}$ est le cercle passant par O, I et J.
2. Soient E barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(C,1)$, et K le point tel que $h(K) = E$.
   a. Montrer que K est le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(I,1)$.
   b. Construire E et K .
3. Soit Δ' la droite passant par K et parallèle à (BC), elle coupe (AB) en E'. Déterminer $h(\Delta)$ et $h(E')$.
4. Soit M le milieu de $[OJ]$. Déterminer l'ensemble des points M quand B varie sur Δ.

27 $ABCD$ est un parallélogramme de centre O, F est un point du segment $[AC]$ distinct de O, de A et de C. La parallèle à (AB) menée de F coupe (BC) en E et (AD) en G.
La parallèle à (AD) menée de F coupe (AB) en H et (CD) en I.

1. Soit h l'homothétie de centre F et telle que $h(A) = C$.
   a. Déterminer en justifiant, $h(H)$ et $h(G)$.
   b. Prouver alors que les droites (GH) et (EI) sont parallèles.
2. On désigne par K le point d'intersection des droites (HE) et (GI), et par h' l'homothétie de centre K et telle que $h'(H) = E$.

a. Déterminer $h'(G)$.

b. Montrer que $h'(F) = C$.

c. Déduire que les droites (HE), (GI) et (AC) sont concourantes.

3. On désigne par S le milieu du segment $[HE]$. Les points A, B, C et D étant fixes.

Déterminer et construire l'ensemble des points S lorsque F décrit le segment $[AC]$ privé des points A, C et O.