Rappels

Division euclidienne

1. a et b désignent deux entiers naturels tels que b est différent de zéro. On admet l ' existence d'un couple unique (q, r) d'entiers naturels tels que :

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq \text{r} < \text{b}$$

2. Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver le couple (q, r) d'entiers naturels tels que :
$$a = bq + r \; avec \; 0 \leq r < b.$$
3. a est le dividende, b est le diviseur, q est le quotient et r est le reste.

Remarques

1. Le reste d'une division euclidienne par 2 est soit 0 soit 1.
2. Tout nombre pair s'écrit sous la forme 2k avec $k \in \mathbb{N}$.
3. Tout nombre impair s'écrit sous la forme 2k + 1 avec $k \in \mathbb{N}$.

Diviseurs et multiples

1. Si a et b sont deux entiers naturels, b n'étant pas nul, on dit que *b divise a* ou que *b est un diviseur de a* ou que *a est un multiple de b* s'il existe un entier k tel que $a = bk$
2. Autrement dit, *b est un diviseur de a* si,*dans la division euclidienne de a par b, le reste est nul* .

Théorème

soit p un entier non nul.

1. Si : $\begin{cases} \text{p divise a} \\ et \\ \text{p divise b} \end{cases}$ alors p divise : $\begin{cases} a+b \\ a-b \; (si \; a \geq b) \\ \alpha a + \beta b \; (\alpha \; et \; \beta \text{ des entiers naturels}) \\ \alpha a - \beta b \; (\alpha \; et \; \beta \text{ des entiers naturels avec } \alpha a \geq \beta b) \end{cases}$
2. *Si* : $\begin{cases} \text{p divise a} \\ et \\ \text{p divise a+b} \end{cases}$ alors p divise b
3. Si p divise a, alors p divise $a \times b$

Système décimal , numération

Notre système décimal actuel, de base 10, utilise les chiffres de 0 à 9, dits arabes.

Le nombre 324 s'écrit de gauche à droite comme étant trois centaines : 3×10^2, auxquelles s'ajoutent deux dizaines : 2×10^1 et quatre unités : 4×10^0. Ainsi

$$324 = 4 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^2$$

Critères de divisibilité

1. Divisibilité par 2 :
   (a) Un entier a est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.
   (b) *Ainsi un entier a le même reste que son chiffre unité dans la division euclidienne par 2*
2. Divisibilité par 5 :
   (a) Un entier a est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.
   (b) *Ainsi : un entier a le même reste que son chiffre unité dans la division euclidienne par 2 ou par 5*

3. Divisibilité par 4
   (a) Un entier est divisible par 4 si le nombre formé avec ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
   (b) *Ainsi un entier a la même reste dans la division euclidienne par 4 que le nombre formé par son chiffre unité et le chiffre dizaine*
4. Divisibilité par 25 :
   (a) un entier est divisible par 25 si le nombre formé avec ses deux derniers chiffres est multiple de 25, donc s'il se termine par 00, 25, 50 ou 75.
   (b) *Ainsi : un entier a le même reste que le nombre formé avec ses deux derniers chiffres dans la division euclidienne par 4 ou par 25.*
5. Divisibilité par 8 :
   (a) Un entier supérieur ou égal à 100, est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.
   (b) *Ainsi le reste de la division euclidienne d'un entier par 8 est égal au reste de la division euclidienne par 8, du nombre formé par ses trois derniers chiffres.*
6. Divisibilité par 3 ou par 9 :
   (a) un entier est divisible par 3 (resp. 9) si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (resp. 9).
   (b) *Ainsi : un entier a le même reste que la somme de ses chiffres dans la division euclidienne par 3 ou par 9.*
7. Divisibilité par 11 :
   (a) Soit n un entier naturel, on note S *la somme alternée de ses chiffres a partir de la droite* (par *alternée*, on entend ajouter/soustraire successivement).
   (b) Exemples
      i. si $n = 1234$ alors
      $$S = 4 - 3 + 2 - 1 = 2$$
      ii. si $n = 987654$ alors
      $$S = 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 = -3$$
   (c) i. Si S ≥ 0 alors n et S ont le même reste dans la division euclidienne par 11.
      ii. n est divisible par 11 si et seulement si S est divisible par 11.
   (d) i. Si $S < 0$, on lui ajoute un multiple de 11 de façon a rendre la somme alternée positive on a alors : n et S + 11p ont le même reste dans la division euclidienne par 11.
      ii. n est divisible par 11 si et seulement si S+11p est divisible par 11.

PGCD

1. La liste des diviseurs de 24 est : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24.
   La liste des diviseurs de 36 est : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36.
   36 et 24 ont pour diviseurs communs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12.
   Le plus grand diviseur commun de 36 et 24, ou de 24 et 36 est 12.
   On le désigne par PGCD(36 ;24).
   PGCD (36 ;24) = PGCD (24 ;36) = 12.
2. Si a est diviseur de b ; alors :
   $$PGCD(a; b) = a$$
3. Pour a>b ;si r est le reste de la division euclidienne de a par b alors :
   $$PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$$
4. Deux nombres sont dits premiers entre eux lorsque leur pgcd est 1.

Exercices

Exercice 1 **Division euclidienne** (Questions indépendantes)

1) Dans une division euclidienne, le diviseur est 23 et le reste est 10.

a) De combien peut-on augmenter le dividende sans changer le quotient entier ?

b) Quels nombres peut-on retrancher au dividende pour que le quotient diminue d'une unité ?

2) **a)** Quels sont les nombres dont la division euclidienne par 5 donne un reste égal au quotient ?

b) Quels sont les nombres dont le quotient dans la division euclidienne par 4 est égal au triple du reste ?

3) Dans la division euclidienne de l'entier naturel x par 7, le reste est égal à 4. Dans la division euclidienne de l'entier naturel y par 7, le reste est égal à 6.

a) Quel est le reste obtenu dans la division euclidienne de x + y par 7 ?

b) Quel est le reste obtenu dans la division euclidienne de 9x par 7 ?

c) Quel est le reste obtenu dans la division euclidienne de x^2 par 7 ?

4) a est un chiffre. Démontrer que le nombre qui s'écrit a00a est divisible par 143.

5) Quel est le plus petit entier naturel x qui donne pour reste 5 quand on le divise par 8, 11 quand on le divise par 14 et 15 quand on le divise par 18

6) Soit n un entier naturel

a) Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres : 8n, 13, 44n et 607 par 4.

b) En déduire le reste de la division euclidienne des nombres :$x = 8n + 13$ *et* $y = 44n + 607$.

c) Montrer que x + y n'est pas premier.

7) Quel est le plus petit entier naturel qui donne pour reste :

7 quand on le divise par 9

13 quand on le divise par 15

22 quand on le divise par 24

8) Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de $3n^2 + 15n + 19$ par $n + 1$.

Exercice 2 **Système décimal** (Questions indépendantes)

1) Trouver un nombre de 2 chiffres sachant que la somme de ses chiffres est 11 et que l'échange de ses deux chiffres le fait augmenter de 63.

2) Deux entiers sont composés des mêmes chiffres écrits dans un ordre différent. Montrer que leur différence est un multiple de 9.

3) a, b, c et d étant des chiffres. Montrer que la somme abcd + dcba est divisible par 11.

Exercice 3 Compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de N par	3	4	8	11
N= 30051108				
$N = 5\overbrace{11\cdots11}^{2102\text{fois}}9$				
N=123aaa459				

Exercice 4 **Critères de divisibilité** (Questions indépendantes)

1) Déterminer x et y afin que le nombre $A = 42x3y$ soit divisible à la fois par 2, 5 et 9.

2) Déterminer x et y afin que le nombre $B = 5x6y$ soit divisible à la fois par 2 et par 9.

3) Soit $A = 2xy2$ Déterminer toutes les valeurs de x et y pour que A soit divisible par 4 et 11

4) Déterminer toutes les valeurs de x et y pour que $A = 33y262x$ soit divisible par 25 et 11

5) Déterminer toutes les valeurs de x et y pour que $A = 3y51x$ soit divisible par 4 et 3.

6) Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier $93xy2$ soit divisible par 9 et par 11.

7) Un nombre à 6 chiffres $x1996y$ est divisible par 99. trouver x et y.

8) L'entier $n = x1527y$ a 6 chiffres. On sait que n est un multiple de 4 et que si on divise n par 11, le reste est égal à 5. Trouver n.

9) Trouver tout les chiffres a et b pour que l'entier $N = 28ab5$ soit divisible par 25 et que le reste de la division euclidienne de N par 11 est 4 .

10) Déterminer un entier naturel n sachant que la somme des ses chiffres est égal â 16 et que sa division euclidienne par 9 donne un quotient égal à 52.

Exercice 5

1) Trouver les entiers naturels n tels que la fraction $\frac{n+17}{n-4}$ soit un entier.

2) Déterminer tous les entiers naturels n pour lesquels n+1 divise 2n+8.

3) Trouver les valeurs de l'entier p telles que : p – 1 divise p + 11.

Exercice 6

1) Déterminer les restes possibles de n^2 par 4

2) En déduire sans calcul que le nombre : $296640512795025^2 + 3$ est divisible par 4

Exercice 7

1) Soit n un nombre impaire supérieur ou égale à 3. Montrer que $n^2 - 5$ est un multiple de 4.

2) n désigne un entier naturel quelconque, Montrer que $n^3 - n$ est divisible par 6.

3) Comment choisir n pour que $n^6 - 1$ soit divisible par 9 ?

4) Montrer que $a^2 + b^2$ est divisible par 3 si et seulement si a et b le sont.

Exercice 8

Soit n un entier naturel, on pose

$$x = 6n + 15 \; et \; y = 2n + 3$$

.

1) Soit d un entier naturel non nul. Vérifier que : x − 3y = 6 puis déduire que si d divise x et d divise y alors d divise 6.

2) En déduire les valeurs possibles des diviseurs communs de x et y.

3) On pose $A = \frac{x}{y}$

a) Vérifier que $A = 3 + \frac{6}{2n+3}$

b) Déduire les valeurs de n pour que A soit un entier naturel.

Exercice 9

Montrons que le carré de tout nombre impair est de la forme 8m + 1 avec m entier naturel.

Exercice 10

Pour n entier relatif, on note

$$P_n = n^2 + n + 1$$

1) Montrer que P_3 est divisible par 13.

2) Caractériser tous les entiers naturels n tels que P_n soit divisible par 13.

Exercice 11

On cherche tous les carrés d'entiers non nuls s'écrivant dans le système décimal : aabb.

1) Démontrer alors que $100a + b$ est le produit de 11 par un carré.

2) Déterminer a + b et démontrer que $9a + 1$ est un carré. Conclure.

Exercice 12

Soit $x = 2n - 1$ et $y = 9n + 4$ où n est un entier naturel non nul.

1) Montrer que si un entier naturel a divise x et divise y, alors $a = 1$ *ou* $a = 17$.

2) **Application**
quels sont les diviseurs communs de 5117 et de 23035 ?

Exercice 13

Soient $x = 11n + 5$ et $y = 9n + 3$; où n est un entier naturel.Montrer que si un entier naturel p divise x et y , alors p divise 12.

Exercice 14

Soit $x = 8n + 3$ et $y = 5n + 2$, où n est un entier naturel. Montrer que x et y sont premiers entre eux.

Exercice 15

Soit n un entier naturel et soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 10.

Montrer que :

1) n est divisible par 13 si et seulement si q + 4r est divisible par 13.

2) n est divisible par 19 si et seulement si q + 2r est divisible par 19.

3) n est divisible par 23 si et seulement si q + 7r est divisible par 23.

Exercice 16

1) Soit $k \in \mathbb{N}$, $a = 13k + 1$ et $b = -26k + 4$. Déterminer les diviseurs possibles communs à a et b .

2) Est il possible de trouver u et v dans $\in \mathbb{N}$ tels que $6u - 9v = 2$?

3) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par $n + 1$

b) Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.

Exercice 17

1) Soit x un réel et k un entier naturel. Développer

$$p(x) = (x - 1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1)$$

2) Soient n, p et q trois entiers naturels , montrer que : si p divise q alors $(n^p - 1)$ divise $(n^q - 1)$.

3) déterminer les entier naturels n tels que :

$$\text{pgcd}(n^{2006} - 1; n^2 - 1) = 8$$

.